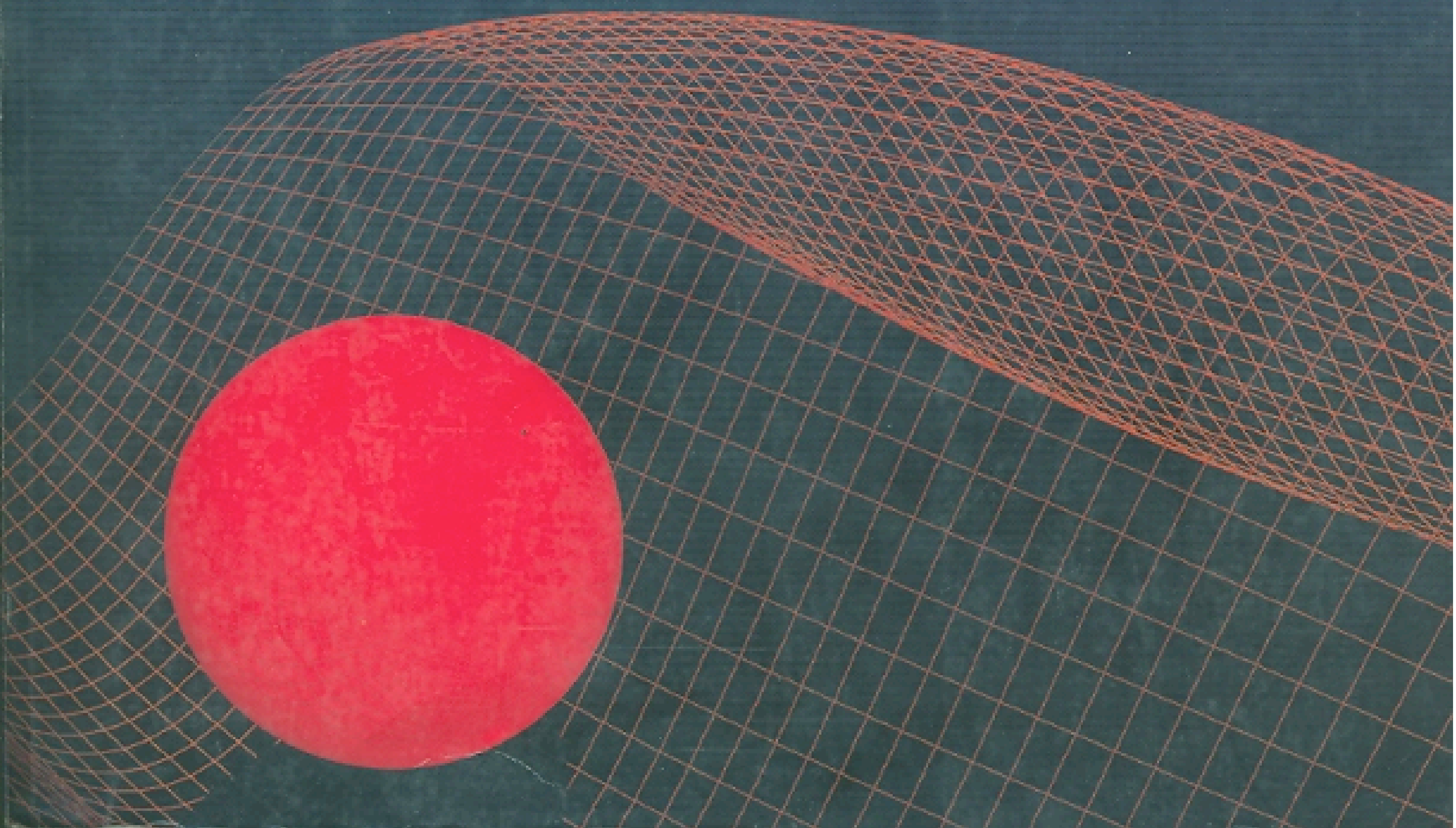
THOMSON

Cálculo

VOLUME I

5ª edição

James Stewart



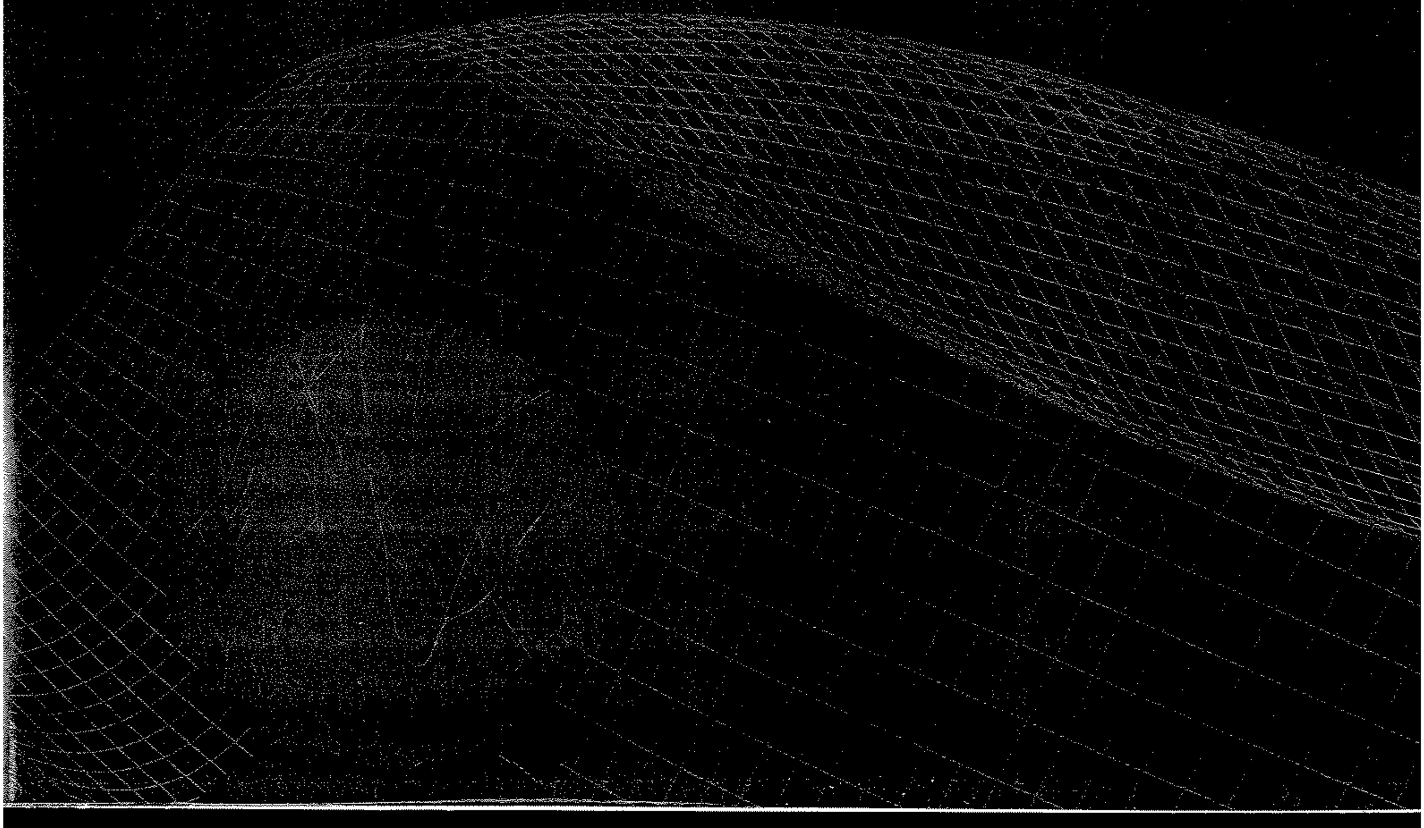
THOMSON

Cálculo

VOLUME I

5ª edição

James Stewart



CÁLCULO

Volume I

[redacted]

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Stewart, James
Cálculo, volume I / James Stewart. –5. ed. –
São Paulo : Pioneira Thomson Learning, 2006.

Título original: Calculus.
Vários tradutores.
Bibliografia.
ISBN 85-221-0479-4

1. Cálculo I. Título

05-5022 CDD-515

Índices para catálogo sistemático:
1. Cálculo : Matemática 515

[redacted]

CÁLCULO

Volume I

5ª EDIÇÃO

JAMES STEWART
McMaster University

Tradução Técnica

Antonio Carlos Moretti
Doutor em Engenharia Industrial pela Georgia Institute of Technology
e Professor Livre-Docente do Imeec – Unicamp

Antonio Carlos Gilli Martins
Doutor em Matemática pela Unicamp e Professor Doutor do Imeec – Unicamp

THOMSON

Austrália Brasil Canadá Cingapura Espanha Estados Unidos México Reino Unido

THOMSON

Editora de Desenvolvimento:
Ada Santos Seles

Supervisora de Produção Editorial:
Patricia La Rosa

Produtora Editorial:
Ligia Cosmo Cantarelli

Produtora Gráfica:
Fabiana Alencar Albuquerque

Tradução Técnica:
Antonio Carlos Moretti
Antonio Carlos Gilli Martins

Copidesque:
Maria Alice da Costa

Revisão:
Silvana Gouveia
Alessandra Miranda de Sá

Composição:
Marco Zero

Capa:
FZ. Dáblio Design Studio

Título, Edição e ISBN do Original:
Calculus, 5th, ISBN : 0-534-39-321-7

Impresso no Brasil.
Printed in Brazil.
5 6 7 8 08 07 06
Setembro de 2005.

Rua Traipu, 114 – 3º andar
Perdizes – CEP 01235-000
São Paulo – SP
Tel.: (11) 3665-9900
Fax: (11) 3665-9901

sac@thomsonlearning.com.br
www.thomsonlearning.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Stewart, James

Cálculo, volume I / James Stewart. – 5. ed. – São Paulo : Pioneira Thomson Learning, 2006.

Título original: Calculus.
Vários tradutores. Bibliografia.
ISBN 85-221-0479-4

1. Cálculo. I. Título.

05-5022 CDD-515

Índices para catálogo sistemático:

1. Cálculo : Matemática 515

Aos meus alunos, antigos e presentes.

Prefácio

> Uma grande descoberta envolve a solução de um grande problema, mas há uma semente de descoberta na solução de qualquer problema. Seu problema pode ser modesto; porém, se ele desafiar sua curiosidade e fizer funcionar sua capacidade inventiva, e caso você o resolva sozinho, então poderá experimentar a tensão e o prazer do triunfo da descoberta.
>
> *George Polya*

A arte de ensinar, segundo Mark van Doren, é a de tomar parte em descobertas. Tentei escrever um livro que tome parte na descoberta do cálculo pelos estudantes – por seu aspecto prático bem como por sua surpreendente beleza. Nesta edição, como nas anteriores, pretendi transmitir aos estudantes um sentido de utilidade do cálculo e desenvolver competência técnica, como também me empenhei em dar uma avaliação da beleza intrínseca do assunto. Newton, sem dúvida, experimentou uma sensação de triunfo no momento de suas grandes descobertas. Eu gostaria que os estudantes partilhassem dessa emoção.

A ênfase está na compreensão dos conceitos. Penso que todos concordam que esta deve ser a meta principal no ensino do cálculo. De fato, o ímpeto para o atual movimento de reforma do cálculo vem da Conferência de Tulane, de 1986, que formulou como recomendação fundamental:

Focalizar na compreensão conceitual.

Tentei implementar essa meta pela Regra de Três: "Tópicos devem ser apresentados de forma geométrica, numérica e algebricamente". Visualização, experimentação numérica e gráfica e outras abordagens mudaram radicalmente a forma de ensinar o raciocínio conceitual. Mais recentemente, a Regra de Três foi expandida, tornando-se a *Regra de Quatro*, com o acréscimo do ponto de vista verbal ou descritivo.

Ao preparar esta edição parti da premissa de que é possível alcançar a compreensão conceitual e ainda manter as melhores tradições do cálculo tradicional. O livro contém elementos de reforma, mas dentro de um contexto de um currículo tradicional.

O Que É Novo Nesta Edição

Enquanto preparava a quinta edição deste livro, passei um ano na Universidade de Toronto ensinando Cálculo utilizando a edição anterior. Eu ouvia atentamente as perguntas de meus alunos e as sugestões de meus colegas. E, cada vez que preparava uma aula, ficava pensando se algum exercício a mais era necessário ou se uma frase deveria ser melhorada ou, ainda, se uma seção deveria ter mais exercícios de um certo tipo. Além disso, prestei muita atenção às sugestões enviadas por vários leitores e aos comentários dos meus revisores.

Uma fonte não muito comum de problemas novos foi um telefonema de um amigo, Richard Armstrong. Richard é sócio de uma firma de consultoria em engenharia e orienta os clientes que constroem hospitais e hotéis. Ele me disse que, em certas partes do mundo, os sistemas de *sprinklers* de prédios grandes são abastecidos de água por compartimentos localizados nos tetos desses prédios. Naturalmente ele sabia que a pressão da água diminui quando o nível de água decresce, mas queria quantificar esse decréscimo de maneira que seus clientes pudessem garantir uma certa pressão durante um dado período.

Eu lhe disse que poderia resolver este problema usando as equações diferenciais separáveis, porém ocorreu-me que esse problema poderia gerar um bom projeto de pesquisa quando combinado com outras idéias.

A estrutura desta edição permanece praticamente a mesma da anterior, no entanto, há vários melhoramentos, pequenos e grandes:

- A revisão de funções trigonométricas inversas foi mudada do Apêndice para a Seção 1.6.
- Novas frases e notas de rodapé foram inseridas no texto para dar mais clareza à exposição.
- Vários trabalhos de arte foram redesenhados.
- Os dados em exemplos e os exercícios foram atualizados no tempo.
- Exemplos foram adicionados. Por exemplo, foi adicionado um novo Exemplo 1 na Seção 5.3 (página 394) porque alguns alunos tiveram uma certa dificuldade em entender a noção de uma função definida por uma integral com um limite de integração variável. Eu acho que seria interessante dar uma olhada no Teorema Fundamental do Cálculo antes de ler o Exemplo 1.
- Foram incluídos determinados itens em alguns dos exemplos já existentes.
- Cerca de 25% dos exercícios em cada capítulo são novos. Aqui estão alguns dos meus favoritos:

Exercício	Página	Exercício	Página	Exercício	Página
2.8.34	164	3.9.55	254	4.4.74	315
5.4.52	410	7.7.36	524		

  Foram adicionados novos problemas nas seções *Problemas Quentes*. Veja, por exemplo, os Problemas 20 e 21 na página 277, os Problemas 9 e 10 na página 585.
- Cinco novos projetos foram incluídos. O projeto na página 242 pede ao aluno para desenvolver um projeto de montanha-russa de maneira que os trilhos sejam suaves nos pontos de transição. O projeto da página 550, o qual agradeço a Larry Riddle pela idéia, é na verdade uma competição na qual a curva vencedora tem o menor comprimento de arco (dentro de certas classes de curvas).

Características

Exercícios Conceituais A maneira mais importante de encorajar a compreensão conceitual é através dos problemas que prescrevemos. Com essa finalidade delineei vários tipos de novos problemas. Alguns conjuntos de exercícios começam com questões exigindo a explicação do significado do conceito básico da seção. (Veja, por exemplo, os primeiros exercícios, nas Seções 2.2, 2.5, 2.7) Analogamente, todas as seções de revisão começam por uma verificação conceitual e um teste do tipo verdadeiro–falso. Outros exercícios testam a compreensão conceitual por gráficos e tabelas (veja os Exercícios 2.8.1-3, 2.9.35-38 e 3.7.1-4. Outro tipo de exercício usa a descrição verbal para testar a compreensão conceitual (veja os Exercícios 2.5.8, 2.9.48, 4.3.59-60 e 7.8.67). Eu particularmente valorizo os problemas que combinam e comparam as abordagens gráficas, numéricas e algébricas (veja os Exercícios 2.6.35-36 e 3.3.23).

Conjuntos de Exercícios Graduados Cada conjunto de exercícios é cuidadosamente graduado, progredindo desde os exercícios conceituais básicos e problemas destinados a desenvolvimento de habilidades até problemas mais desafiadores envolvendo as aplicações e provas.

Dados do Mundo Real Meu assistente e eu despendemos um bom tempo em bibliotecas, contatando companhias e agências governamentais e procurando na Internet por dados do mundo real para introduzir, motivar e ilustrar os conceitos do cálculo. Como resultado, muitos de nossos exemplos e exercícios tratam de funções definidas por esses dados numéricos ou gráficos. Veja, por exemplo, as Figuras 1, 11 e 12 na Seção 1.1 (sismogramas do terremoto de Northridge), Exercício 2.9.36 (porcentagem da população com idade inferior a 18 anos), Exercício 5.1.14 (velocidade do ônibus espacial *Endeavour*) e Figura 4 da Seção 5.4 (consumo de energia em São Francisco).

Projetos Uma maneira de envolver os estudantes e então torná-los aprendizes ativos é fazê-los trabalhar (talvez em grupos) em projetos de extensão, que dão um grande sentimento de realização quando finalizados. Isso inclui quatro tipos de projetos. *Projetos Aplicados*, que envolvem as aplicações destinadas a apelar para a imaginação dos estudantes. *Projetos Escritos*, que pedem aos estudantes que comparem os métodos atuais com aqueles usados pelos fundadores do cálculo (por exemplo, o método de Fermat para encontrar tangentes). São sugeridas algumas referências. *Projetos Descobertas*, que antecipam os resultados que serão discutidos posteriormente ou encorajam a descoberta por meio do reconhecimento do padrão (veja a Seção 7.6).

Tecnologia A disponibilidade de tecnologia torna ainda mais importante compreender claramente os conceitos que fundamentam as imagens na tela. Quando usados adequadamente, calculadoras gráficas e computadores são ferramentas valiosas na descoberta e compreensão desses conceitos. Este livro pode ser usado com ou sem tecnologia, e usei dois símbolos especiais para indicar quando um tipo especial de máquina é necessário. O ícone indica um exemplo ou exercício que requer o uso dessa tecnologia, mas isso não significa que ela não possa ser usada também em outros exercícios. O símbolo é reservado para os problemas em que é requerida toda a capacidade de um sistema algébrico computacional (como Derive, Maple, Mathematica ou TI89/92). Todavia, a tecnologia não torna obsoletos o lápis e o papel. Os cálculos à mão e esboços são freqüentemente preferíveis à tecnologia para ilustrar e reforçar alguns conceitos. Professores e estudantes precisam desenvolver a habilidade para decidir quando é mais apropriada a máquina ou a mão.

Resolução de Problemas

Os estudantes geralmente têm dificuldades com os problemas para os quais não há um único procedimento bem-definido para obter a resposta. Penso que ninguém usa adequadamente a estratégia das quatro etapas para a solução dos problemas proposta por George Polya e, por isso, incluí uma versão de seus princípios no fim do Capítulo 1. Esses conceitos são aplicáveis, explícita e implicitamente, em todo o livro. Após os outros capítulos coloquei seções denominadas *Problemas Quentes*, que apresentam como atração principal os exemplos de como atacar os problemas desafiadores do cálculo. Ao selecionar os variados problemas para essas seções tive em mente seguir os conselhos de David Hilbert: "Um problema matemático deve ser difícil para nos seduzir, mas não inacessível de forma a zombar de nossos esforços". Quando coloquei esses problemas desafiadores como tarefas de testes, graduei-os de diferentes maneiras. Aqui, eu recompensei significativamente o estudante por idéias na direção de uma solução e por reconhecer quais princípios da solução de problemas são relevantes.

Conteúdo

Uma Apresentação do Cálculo O livro começa com uma visão geral do assunto, incluindo uma lista de questões pai motivar o estudo do cálculo.

Capítulo 1 Funções e Modelos Desde o início estão enfatizadas as representações múltiplas de funções: verbal, numéric visual e algébrica. Uma discussão de modelos matemáticos leva a uma revisão das funçõe padrão, incluindo a função exponencial e logarítmica, sob esses quatro pontos de vista.

Capítulo 2 Limites e Derivadas O material sobre limites está motivado por uma discussão anterior dos problemas da tar gente e da velocidade. Os limites são tratados sob os pontos de vista descritivo, gráfic numérico e algébrico. A Seção 2.4, sobre a definição precisa de um limite em termos d ε-δ, é opcional. As Seções 2.8 e 2.9 tratam de derivadas (especialmente de funções definid gráfica e numericamente) antes das regras de diferenciação, cobertas no Capítulo 3. Aqui c exemplos e exercícios exploram os significados das derivadas em vários contextos.

Capítulo 3 Regras de Diferenciação Todas as funções básicas são diferenciadas aqui, incluindo a exponencial, logarítmica inversa das funções trigonométricas. Quando as derivadas são computadas em aplicaçõe os estudantes são questionados a explicar seus significados.

Capítulo 4 Aplicações da Diferenciação As seções sobre as funções monótonas e concavidade foram combinadas em uma únic que explica como as derivadas afetam o aspecto do gráfico. Fazer gráficos com tecnologi enfatiza a interação entre cálculo, calculadoras e análise de famílias de curvas. São dadc problemas substanciais de otimização, inclusive uma explicação de por que você dever elevar sua cabeça 42° para ver o topo de um arco-íris.

Capítulo 5 Integrais Os problemas de área e distância servem para motivar a integral definida, com a notaçã somatória introduzida conforme necessário. (Uma cobertura completa da notaçã somatória é dada no Apêndice E.) A ênfase está colocada na explicação do significado d integral em vários contextos, bem como na estimativa dos valores dela a partir de gráfico e tabelas.

Capítulo 6 Aplicações de Integração Apresentei aqui as aplicações da integração – área, volume, trabalho, valor médio –, que poder ser feitas razoavelmente sem técnicas especializadas de integração. São enfatizados os método genéricos. A meta é tornar os estudantes capazes de dividir uma quantidade em partes pequena estimar com somas de Riemann e reconhecer o limite como uma integral.

Capítulo 7 Técnicas de Integração Todos os métodos tradicionais são estudados neste capítulo, mas o desafio é reconhece qual técnica é melhor em determinada situação. Da mesma forma, na Seção 7.5, apresen tei a estratégia para a integração. O uso de sistemas algébricos computacionais está discu tido na Seção 7.6.

Capítulo 8 Mais Aplicações de Integração Expomos aqui as aplicações de integração – comprimento do arco e área da superfície para as quais é útil ter disponível todas as técnicas de integração, bem como aplicações biologia, economia e física (força hidrostática e centro de massa). Uma nova seção sobr probabilidade foi também incluída. Há aqui mais aplicações do que realisticamente poden ser cobertas em um dado curso. Cabe aos professores selecionar aquelas adequadas a seu alunos e pelas quais têm mais entusiasmo.

Agradecimentos

A preparação desta edição e das anteriores envolveu várias horas na leitura dos conselhos "algumas vezes contraditórios" de um grande número de bons revisores. Agradeço enormemente o tempo despendido por eles para compreender os motivos pelos quais segui em uma determinada direção. Aprendi um pouco com cada um deles.

Revisores desta edição

Martina Bode (Northwestern University), Gary W. Harrison (College of Charleston), Hussain S. Nur (California State University, Fresno), Philip L. Bowers (Florida State University), Randall R. Holmes (Auburn University), Scott Chapman (Trinity University), James F. Hurley (University of Connecticut), Mike Penna (Indiana University-Purdue, University of Indianapolis), Charles N. Curtis (Missouri Southern State College), Matthew A. Isom (Arizona State University), John Ringland (State University of New York em Buffalo), John W. Davenport (Georgia Southern University), Zsuzsanna M. Kadas (St. Michael's College), E. Arthur Robinson Jr. (The George Washington University), Elias Deeba (University of Houston-Downtown), Frederick W. Keene (Pasadena City College), Rob Root (Lafayette College), Greg Dresden (Washington and Lee University), Robert L. Kelley (University of Miami), John C. Lawlor (University of Vermont), Teresa Morgan Smith (Blinn College), Martin Erickson (Truman State University), Cristopher C. Leary (State University of New York em Geneseo), Donald W. Solomon (University of Wisconsin-Milwaukee), Laurene V. Fausett (Georgia Southern University), William O. Martin (North Dakota State University), Kristin Stoley (Blinn College), Norman Feldman (Sonoma State University), Gerald Y. Matsumoto (American River College), Paul Xavier Uhlig (St. Mary's University, San Antonio), José D. Flores (The University of South Dakota), Gordon Melrose (Old Dominion University), Dennis H. Wortman (University of Massachusetts), Kevin A. Grasse (The University of Oklahoma), Michael Montaño (Riverside Community College), Howard B. Hamilton (California State University, Sacramento), Xian Wu (University of South Carolina).

Gostaria de agradecer, ainda, a George Bergman, Stuart Goldenberg, Emile LeBlanc, Gerald Leibowitz, Charles Pugh, Marina Ratner, Peter Rosenthal e Alan Weinstein por suas opiniões; Dan Clegg por suas pesquisas em bibliotecas e na Internet; Arnold Good por sua ajuda nos problemas de otimização com diferenciação implícita; Al Shenk e Dennis Zill pela permissão do uso de seus projetos; George Bergman, David Bleecker, Dan Clegg, Victor Kaftal, Anthony Lam, Jamie Lawson, Ira Rosenholtz, Lowell Smylie e Larry Wallen por suas idéias em exercícios; Dan Drucker pelo projeto da montanha-russa; Tom Farmer, Fred Gass, John Ramsay, Larry Riddle e Philip Straffin por suas idéias de projetos; Dan Anderson e Dan Drucker pela resolução dos novos exercícios; e Jeff Cole e Dan Clegg por suas cuidadosas leituras do manuscrito original. Sou muito grato a Jeff Cole por suas sugestões para melhorar os exercícios. Dan Clegg atuou como meu assistente do começo ao fim deste trabalho; ele leu, corrigiu, fez inúmeras sugestões e contribuiu em muitos dos novos exercícios.

Fui muito afortunado por ter trabalhado com alguns dos melhores editores de livros de matemática das duas últimas décadas: Ron Munro, Harry Campbell, Craig Barth, Jeremy Hayhurst e Gary Ostedt, e, por último, Bob Pirtle. Bob continua a tradição dos editores, os quais, enquanto oferecem amplo apoio e sólidos conselhos, confiaram em meus instintos e me permitiram produzir os livros que eu queria escrever.

James Stewart

Sumário

4 Aplicações da Diferenciação 278

5 Integrais 368

Apêndices

Volume II

CÁLCULO

Volume I

Ao Estudante

Há uma diferença entre ler um texto de cálculo e um jornal ou um romance ou, até mesmo, um livro de física. Assim, não desanime se tiver de ler uma passagem mais de uma vez para poder entendê-la. Você deve ter lápis, papel e uma calculadora à mão para esboçar um diagrama ou fazer um cálculo.

Alguns estudantes começam a fazer suas tarefas de casa e lêem o texto somente quando empacam em algum exercício. Sugiro que leia e tente compreender uma seção do texto antes de começar os exercícios. Em particular, você deve examinar as definições para entender o significado exato dos termos. E, antes de ler cada exemplo, sugiro que você cubra a solução e tente resolver o problema por seus próprios meios. Fazendo isto, aprenderá muito mais do que simplesmente olhando para a solução.

Parte da meta deste curso é treiná-lo a pensar logicamente. Aprender a escrever a solução dos exercícios de uma forma conexa, passo a passo e com sentenças explicativas – e não uma fileira de equações desconexas ou fórmulas.

As respostas dos exercícios de número ímpar estão no final do livro, no Apêndice H. Alguns deles pedem uma explicação verbal, uma interpretação ou uma descrição. Nesses casos, não existe uma maneira única de dar a resposta; logo, não se preocupe em obter a resposta definitiva. Além disso, há várias formas de expressar uma resposta numérica ou algébrica; assim, se sua resposta for diferente da minha, não conclua imediatamente que a sua esteja errada. Por exemplo, se a resposta dada no final do livro for $\sqrt{2} - 1$ e você obtiver $1/(1 + \sqrt{2})$, então você está certo, e racionalizando o denominador veremos que as respostas são iguais.

O ícone indica que definitivamente um exercício requer o uso de uma calculadora científica ou um computador com *software* gráfico. (A Seção 1.4 discute o uso desses recursos e de algumas falhas que você poderá encontrar.) Porém, isso não significa que os recursos gráficos não possam ser usados para verificar seu trabalho em outros exercícios. O símbolo está reservado para problemas em que se faz necessário o uso de um sistema algébrico computacional (como Derive, Maple, Mathematica ou TI89/92). Você vai encontrar também o símbolo , que o adverte sobre a possibilidade de cometer um erro. Esse símbolo aparece em situações nas quais observei que um grande número de estudantes tende a cometer o mesmo erro.

O cálculo – muito justamente – é considerado um dos maiores feitos do intelecto humano. Espero que você descubra que ele não é somente útil, mas também intrinsecamente belo.

James Stewart

Erros de Aproximação*

Se x' for uma aproximação para x, então:

$$E = |x - x'|$$

O número E é chamado de *erro absoluto* na aproximação.

- Se $|x - x'| \leqslant 10^{-p}$, então x' aproxima x com um erro de no máximo 10^{-p}.
- Se $|x - x'| \leqslant 5.10^{-p}$, então x' aproxima x até a $(p + 1)$-ésima casa decimal, ou até o $1/(10)^{p+1}$ mais próximo.

Exemplos:

- Se $|x - x'| \leqslant 0{,}5$, então x' aproxima x até o inteiro mais próximo.
- Se $|x - x'| \leqslant 0{,}005$, então x' aproxima x até a segunda casa decimal, ou até o centésimo mais próximo.

Além disso, se x' aproxima x até a $(p + 1)$-ésima casa decimal, dizemos que a aproximação x' é correta até a $(p + 1)$-ésima casa decimal, ou que a aproximação x' tem $(p + 1)$ casas decimais de precisão.

Arredondamento*

Dado um número racional $a_1a_2a_3a_4...a_n, b_1b_2b_3...b_mb_{m+1}$, então arredondamos para m casas decimais de acordo com a regra:

- Se $5 \leq b_{m+1} \leqslant 9$, então o número fica $a_1a_2a_3...a_n, b_1b_2b_3...[(b_m) + 1]$.
- Se $0 \leq b_{m+1} \leqslant 4$, então o número fica $a_1a_2a_3...a_n, b_1b_2b_3...b_m$.

A expressão "usado correto até determinada casa decimal" implica que, se a correção for, por exemplo, até a décima casa decimal, o erro começará na décima primeira casa decimal.

Exemplos:

- $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$; 1,4 correta com uma casa decimal.
- $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$; 1,41 correta com duas casas decimais.

* Observações da tradução para a edição brasileira.

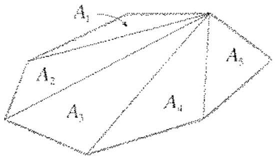
CÁLCULO

Volume I

Uma Apresentação do Cálculo

Quando você terminar este curso, será capaz de explicar a formação e a localização de um arco-íris, calcular a força exercida pela água em uma represa, analisar os ciclos demográficos dos predadores e das presas, e calcular a velocidade de vazão de uma pedra.

O cálculo é fundamentalmente diferente da matemática que você já estudou. O cálculo é menos estático e mais dinâmico. Ele trata de variação e de movimento, bem como de quantidades que tendem a outras quantidades. Por essa razão, pode ser útil ter uma visão geral do assunto antes de começar um estudo mais intensivo. Vamos dar aqui uma olhada em algumas das principais idéias do cálculo mostrando como surgem os limites quando tentamos resolver uma variedade de problemas.



$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

FIGURA 1

O Problema da Área

As origens do cálculo remontam à Grécia antiga, pelo menos 2.500 anos atrás, quando foram encontradas as áreas usando o chamado "método da exaustão". Naquela época os gregos já sabiam encontrar a área de qualquer polígono dividindo-o em triângulos, como na Figura 1 e, em seguida, somando-se as áreas obtidas.

É muito mais difícil achar a área de uma figura curva. O método da exaustão dos antigos gregos consistia em inscrever e circunscrever a figura com polígonos e então aumentar o número de lados deles. A Figura 2 ilustra esse procedimento no caso especial de um círculo com polígonos regulares inscritos.

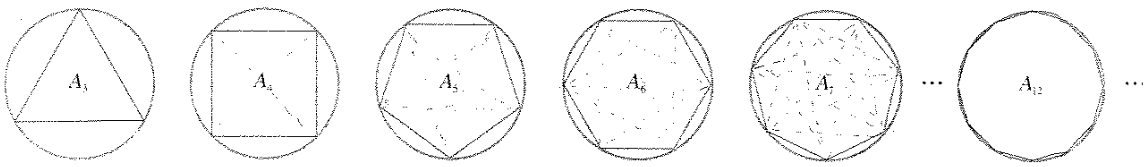


FIGURA 2

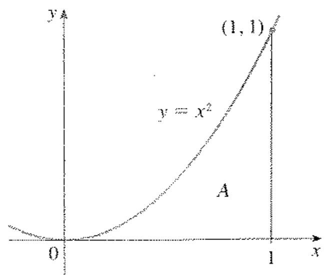


FIGURA 3

Seja A_n a área do polígono inscrito com n lados. À medida que aumentamos n, fica evidente que A_n ficará cada vez mais próxima da área do círculo. Dizemos então que a área do círculo é o *limite* das áreas dos polígonos inscritos, e escrevemos

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

Os gregos, porém, não usavam explicitamente os limites. Todavia, por um raciocínio indireto, Eudoxo (século V a.C.) usou a exaustão para provar a conhecida fórmula da área do círculo: $A = \pi r^2$.

Usaremos uma idéia similar no Capítulo 5 para encontrar a área de regiões do tipo mostrado na Figura 3. Vamos aproximar a área desejada A por áreas de retângulos (como na Figura 4), fazendo decrescer a largura dos retângulos, e então calculando A como o limite dessas somas de áreas de retângulos.

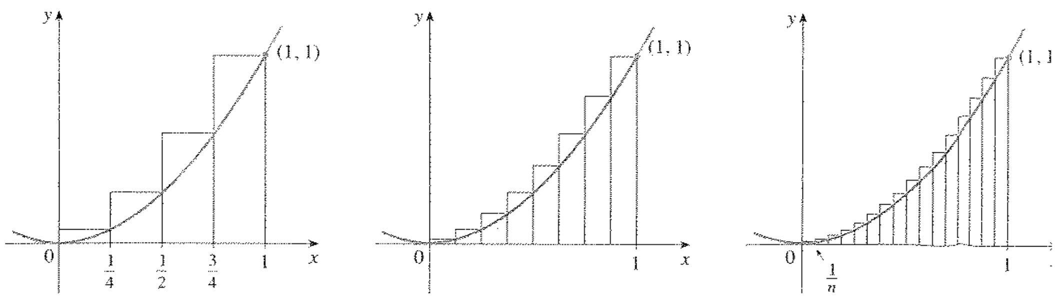


FIGURA 4

O problema da área é central no ramo do cálculo chamado *cálculo integral*. As técnicas que vamos desenvolver no Capítulo 5 para encontrar áreas também possibilitarão o cálculo de volumes de um sólido, o comprimento de um arco, a força da água sobre um dique, a massa e o centro de gravidade de uma barra, e o trabalho realizado ao se bombear a água para fora de um tanque.

O Problema da Tangente

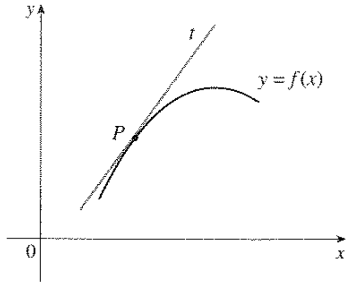


FIGURA 5
Uma reta tangente em P

Considere o problema de tentar determinar a reta tangente t a uma curva com equação $y = f(x)$ em um dado ponto P. (Daremos uma definição precisa de uma reta tangente no Capítulo 2. Por ora, você poderá pensá-la como uma reta que toca a curva em P como na Figura 5.) Uma vez que sabemos ser P um ponto sobre a reta tangente, podemos encontrar a equação de t se conhecermos sua inclinação m. O problema está no fato de que para computar a inclinação é necessário o conhecimento de dois pontos e sobre t temos somente o ponto P. Para contornar esse problema determinamos primeiro uma aproximação para m, tomando sobre a curva um ponto próximo Q e computando a inclinação m_{PQ} da reta secante PQ. Da Figura 6 vemos que

$$\boxed{1} \qquad m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

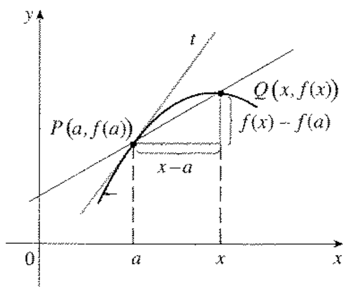


FIGURA 6
Uma reta da secante PQ

Imagine agora o ponto Q movendo-se ao longo da curva em direção a P, como na Figura 7. Você pode ver que a reta secante gira e aproxima-se da reta tangente como sua posição-limite. Isso significa que a inclinação m_{PQ} da reta secante fica cada vez mais próxima da inclinação m da reta tangente. Isso é denotado por

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

e dizemos que m é o limite de m_{PQ} quando Q tende ao ponto P ao longo da curva. Uma vez que x tende a a quando Q tende a P, também podemos usar a Equação 1 para escrever

$$\boxed{2} \qquad m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

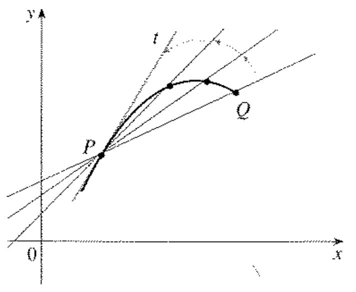


FIGURA 7
Uma reta secante aproximando-se de uma reta tangente

Exemplos específicos desse procedimento serão dados no Capítulo 2.

O problema da tangente deu origem ao ramo do cálculo chamado *cálculo diferencial*, que foi inventado mais de 2 mil anos após o cálculo integral. As principais idéias subjacentes ao cálculo diferencial devem-se ao matemático francês Pierre Fermat (1601-1665) e foram desenvolvidas pelos matemáticos ingleses John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677) e Isaac Newton (1642-1727) e pelo matemático alemão Gottfried Leibniz (1646-1716).

Os dois ramos do cálculo e seus problemas principais, da área e da tangente, apesar de parecerem completamente diferentes, têm uma estreita conexão. Tanto o problema da área como o da tangente são considerados problemas inversos em um sentido que será descrito no Capítulo 5.

Velocidade

Quando olhamos no velocímetro de um carro e vemos que ele está a 48 mi/h, o que essa informação indica? Sabemos que, se a velocidade permanecer constante, após uma hora o carro terá percorrido 48 milhas. Porém, se a velocidade do carro variar, qual o significado de a velocidade ser, em um dado momento, 48 mi/h?

Para analisar essa questão, vamos examinar o movimento de um carro percorrendo um estrada reta e supondo que possamos medir a distância coberta por ele (em pés) em inter valos de 1 segundo, como na tabela a seguir:

t = Tempo decorrido (s)	0	1	2	3	4	5
d = Distância (pés)	0	2	10	25	43	78

Como primeiro passo para encontrar a velocidade após 2 segundos de movimento vamo calcular qual a velocidade média no intervalo de tempo $2 \leqslant t \leqslant 4$:

$$\begin{aligned} \text{velocidade média} &= \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}} \\ &= \frac{43 - 10}{4 - 2} \\ &= 16{,}5 \text{ pés/s} \end{aligned}$$

Analogamente, a velocidade média no intervalo $2 \leqslant t \leqslant 3$ é

$$\text{velocidade média} = \frac{25 - 10}{3 - 2} = 15 \text{ pés/s}$$

Nosso pressentimento é de que a velocidade no instante $t = 2$ não pode ser muito diferen te da velocidade média durante um pequeno intervalo de tempo que começa em $t = 2$ Assim, vamos imaginar que a distância percorrida foi medida em intervalos de 0, segundo, como na tabela a seguir:

t	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
d	10,00	11,02	12,16	13,45	14,96	16,80

Computando então a velocidade média no intervalo de tempo $[2, 2{,}5]$:

$$\text{velocidade média} = \frac{16{,}80 - 10{,}00}{2{,}5 - 2} = 13{,}6 \text{ pés/s}$$

Os resultados desses cálculos estão mostrados na tabela:

Intervalo de tempo	[2, 3]	[2, 2,5]	[2, 2,4]	[2, 2,3]	[2, 2,2]	[2, 2,1]
Velocidade média (pés/s)	15,0	13,6	12,4	11,5	10,8	10,2

As velocidades médias em intervalos cada vez menores parecem ficar cada vez mai próximas de 10; dessa forma, esperamos que exatamente em $t = 2$ a velocidade seja d cerca de 10 pés/s. No Capítulo 2 definiremos a velocidade instantânea de um objeto er movimento como o limite das velocidades médias em intervalos de tempo cada ve menores.

Na Figura 8 mostramos uma representação gráfica do movimento de um carro rede senhando a distância percorrida como uma função do tempo. Se escrevermos $d = f(t$ então $f(t)$ é o número de pés percorridos após t segundos. A velocidade média no interval de tempo $[2, t]$ é

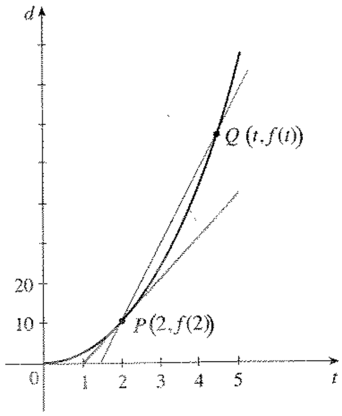


FIGURA 8

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

e é a mesma coisa que a inclinação da reta secante PQ da Figura 8. A velocidade v quando $t = 2$ é o valor-limite da velocidade média quando t aproxima-se de 2; isto é,

$$v = \lim_{t \to 2} \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

e da Equação 2 vemos que isso é igual à inclinação da reta tangente à curva em P.

Dessa forma, ao resolver o problema da tangente em cálculo diferencial, também estamos resolvendo os problemas relativos à velocidade. A mesma técnica se aplica a problemas relativos à taxa de variação nas ciências naturais e sociais.

O Limite de uma Seqüência

No século V a.C., o filósofo grego Zenon propôs quatro problemas, hoje conhecidos como *Paradoxos de Zenon*, com o intento de desafiar algumas das idéias correntes em sua época sobre espaço e tempo. O segundo paradoxo de Zenon diz respeito a uma corrida entre o herói grego Aquiles e uma tartaruga para a qual foi dada uma vantagem inicial. Zenon argumentava que Aquiles jamais ultrapassaria a tartaruga, pois se ele começasse em uma posição a_1 e a tartaruga em t_1 (veja a Figura 9), quando ele atingisse o ponto $a_2 = t_1$ a tartaruga estaria adiante, em uma posição t_2. No momento em que Aquiles atingisse $a_3 = t_2$, a tartaruga estaria em t_3. Esse processo continuaria indefinidamente, e, dessa forma, parece que a tartaruga estaria sempre à frente! Todavia, isso desafia o senso comum.

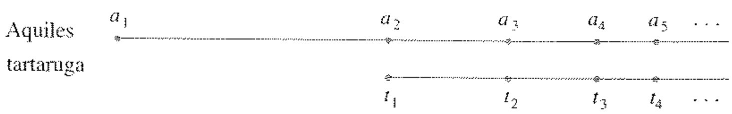


FIGURA 9

Uma forma de explicar esse paradoxo usa a idéia de *seqüência*. As posições sucessivas de Aquiles e da tartaruga são respectivamente $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ e $(t_1, t_2, t_3, \ldots)$, conhecidas como seqüências.

Em geral, uma seqüência $\{a_n\}$ é um conjunto de números escritos em uma ordem definida. Por exemplo, a seqüência

$$\left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots\right\}$$

pode ser descrita como sendo dada pela seguinte fórmula para o n-ésimo termo:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

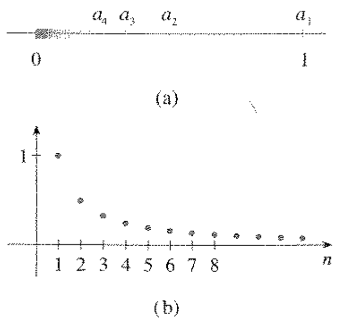


FIGURA 10

Podemos visualizar essa seqüência redesenhando seus termos sobre uma reta na qual estão determinados um ponto zero, uma unidade de medida e um sentido crescente, como na Figura 10(a), ou desenhando seu gráfico, como na Figura 10(b). Observe em ambas as figuras que os termos da seqüência $a_n = 1/n$ tornam-se cada vez mais próximos de 0 à medida que n cresce. De fato, podemos encontrar termos tão pequenos quanto desejarmos, bastando para isso tomarmos n suficientemente grande. Dizemos então que o limite da seqüência é 0, e indicamos isso por

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Em geral, a notação

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

será usada se os termos a_n tendem a um número L quando n torna-se grande. Isso significa que podemos tornar os números a_n tão próximos de L quanto quisermos escolhendo n suficientemente grande.

O conceito de limite de uma seqüência ocorre sempre que usamos a representação decimal de um número real. Por exemplo, se

$$\begin{aligned} a_1 &= 3,1 \\ a_2 &= 3,14 \\ a_3 &= 3,141 \\ a_4 &= 3,1415 \\ a_5 &= 3,14159 \\ a_6 &= 3,141592 \\ a_7 &= 3,1415926 \\ &\vdots \end{aligned}$$

então $$\lim_{n\to\infty} a_n = \pi$$

Os termos nessa seqüência são aproximações racionais de π.

Vamos voltar ao paradoxo de Zenon. As posições sucessivas de Aquiles e da tartaruga formam as seqüências $\{a_n\}$ e $\{t_n\}$, onde $a_n < t_n$ para todo n. Podemos mostrar que ambas as seqüências têm o mesmo limite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p = \lim_{n\to\infty} t_n$$

É precisamente nesse ponto p que Aquiles ultrapassa a tartaruga.

A Soma de uma Série

Outro paradoxo de Zenon, conforme nos foi passado por Aristóteles, é o seguinte: "Uma pessoa em um certo ponto de uma sala não pode caminhar até a parede. Para tanto ela deveria percorrer metade da distância, depois a metade da distância restante, e então novamente a metade da distância que restou e assim por diante, de forma que o processo pode ser sempre continuado e não terá um fim". (Veja a Figura 11.)

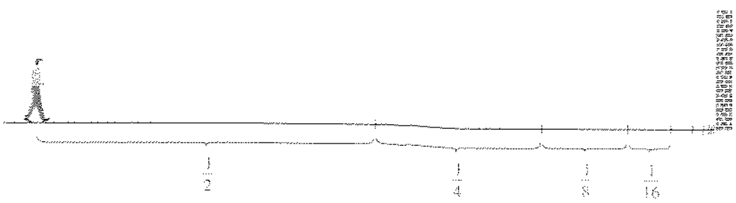


FIGURA 11

Como, naturalmente, sabemos que de fato a pessoa pode chegar até a parede, isso sugere que a distância total possa ser expressa como a soma de infinitas distâncias cada vez menores, como a seguir:

$$\boxed{3} \qquad 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Zenon argumentava que não fazia sentido somar um número infinito de números. Porém há situações em que fazemos implicitamente somas infinitas. Por exemplo, na notação decimal, o símbolo, $0,\overline{3} = 0,3333\ldots$ significa

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1.000} + \frac{3}{10.000} + \cdots$$

dessa forma, de algum jeito, deve ser verdade que

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1.000} + \frac{3}{10.000} + \cdots = \frac{1}{3}$$

Mais genericamente, se d_n denotar o n-ésimo dígito na representação decimal de um número, então

$$0,d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} + \cdots$$

Portanto, algumas somas infinitas, ou, como são chamadas, séries infinitas, têm um significado. Todavia, é necessário definir cuidadosamente o que é a soma de uma série.

Retornando à série da Equação 3, denotamos por s_n a soma dos n primeiros termos da série. Assim

$$\begin{aligned}
s_1 &= \tfrac{1}{2} = 0,5 \\
s_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 0,75 \\
s_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 0,875 \\
s_4 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = 0,9375 \\
s_5 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} = 0,96875 \\
s_6 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} = 0,984375 \\
s_7 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128} = 0,9921875 \\
&\vdots \\
s_{10} &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{1.024} \approx 0,99902344 \\
&\vdots \\
s_{16} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{16}} \approx 0,99998474
\end{aligned}$$

Observe que à medida que somamos mais e mais termos, as somas parciais ficam cada vez mais próximas de 1. De fato, pode ser mostrado que tomando n suficientemente grande (isto é, adicionando um número grande de termos da série), podemos tornar a soma parcial s_n tão próxima de 1 quanto quisermos. Parece então razoável dizer que a soma da série infinita é 1 e escrever

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Em outras palavras, a razão de a soma da série ser 1 é que

$$\lim_{n \to \infty} s_n = 1$$

No Capítulo 11 do Volume II discutiremos mais essas idéias.

Resumo

Vimos que o conceito de limite surge de problemas tais como encontrar a área de uma região, a tangente a uma curva, a velocidade de um carro ou a soma de uma série infinita. Em cada um dos casos, o tema comum é o cálculo de uma quantidade como o limite de outras quantidades mais facilmente calculáveis. É essa idéia básica que coloca o cálculo à parte das demais áreas da matemática. Na realidade, poderíamos definir o cálculo como aquele ramo da matemática que trata de limites.

Sir Isaac Newton inventou sua versão do cálculo a fim de explicar o movimento dos planetas em torno do Sol. Hoje o cálculo é usado na determinação de órbitas de satélites e naves espaciais, na predição do tamanho de uma população, na estimativa de como aumenta o preço do café, na previsão do tempo, na medida do fluxo sangüíneo de saída do coração, no cálculo dos prêmios dos seguros de vida e em uma grande variedade de outras áreas. Vamos explorar neste livro algumas dessas aplicações do cálculo.

Para transmitir uma noção da potência dessa matéria, vamos finalizar esta apresentação com uma lista de perguntas que você será capaz de responder usando o cálculo:

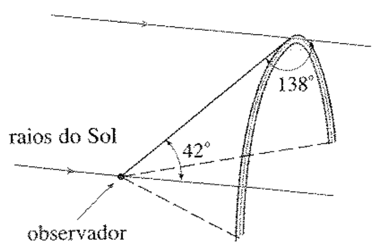
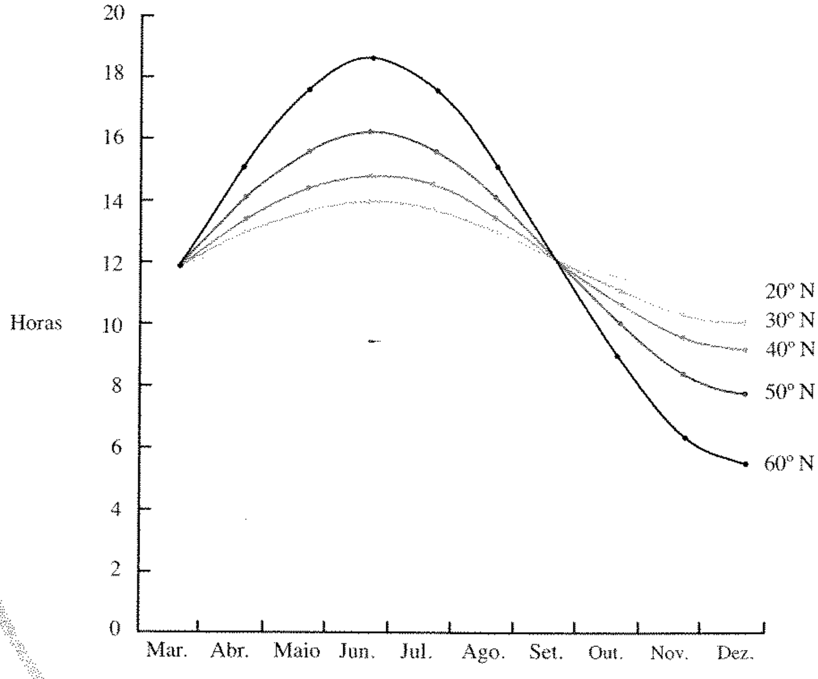


FIGURA 12

1. Como você explicaria o fato, ilustrado na Figura 12, de que o ângulo de elevação de um observador até o ponto mais alto em um arco-íris é 42°? (Veja a página 288.)
2. Como você poderia explicar as formas das latas nas prateleiras de um supermercado? (Veja a página 341.)
3. Qual o melhor lugar para se sentar em um cinema? (Veja a página 468.)
4. A qual distância de um aeroporto um piloto deve começar a descida? (Veja a página 241.)

1

Funções e Modelos



Uma representação gráfica de uma função – aqui o número de horas de luz solar como uma função da época do ano em várias latitudes – é sempre o modo mais conveniente e natural de representá-la.

O objeto fundamental do cálculo são as funções. Este capítulo abre o caminho para o cálculo discutindo as idéias básicas concernentes às funções e seus gráficos, bem como as formas de combiná-los e transformá-los. Enfatizamos que uma função pode ser representada de várias maneiras: por uma equação, por uma tabela, por um gráfico ou mesmo por meio de palavras. Vamos observar os principais tipos de funções que ocorrem no cálculo e descrever como usá-las como modelos matemáticos de fenômenos do mundo real. Também discutiremos o uso de calculadoras gráficas e de software gráfico para computadores.

1.1 Quatro Maneiras de Representar uma Função

As funções surgem quando uma quantidade depende de outra. Consideremos as seguintes situações:

A. A área A de um círculo depende de seu raio r. A lei que conecta r e A é dada pela equação $A = \pi r^2$. A cada número r positivo existe associado um único valor de A, e dizemos que A é uma *função* de r.

B. A população humana mundial P depende do tempo t. A tabela ao lado fornece estimativas da população mundial $P(t)$ no instante t, para determinados anos. Por exemplo,

$$P(1950) \approx 2.560.000.000$$

Porém para cada valor do tempo t existe um valor de P correspondente, e dizemos que P é uma função de t.

Ano	População (milhões)
1900	1.650
1910	1.750
1920	1.860
1930	2.070
1940	2.300
1950	2.560
1960	3.040
1970	3.710
1980	4.450
1990	5.280
2000	6.080

C. O custo C de enviar uma carta pelo correio depende de seu peso w. Embora não haja uma fórmula simples conectando w e C, o correio tem uma fórmula que permite calcular C quando é dado w.

D. A aceleração vertical a do solo registrada por um sismógrafo durante um terremoto é uma função do tempo t decorrido. A Figura 1 mostra o gráfico gerado pela atividade sísmica durante o terremoto de Northridge, que abalou Los Angeles em 1994. Para um dado valor de t, o gráfico fornece um valor correspondente de a.

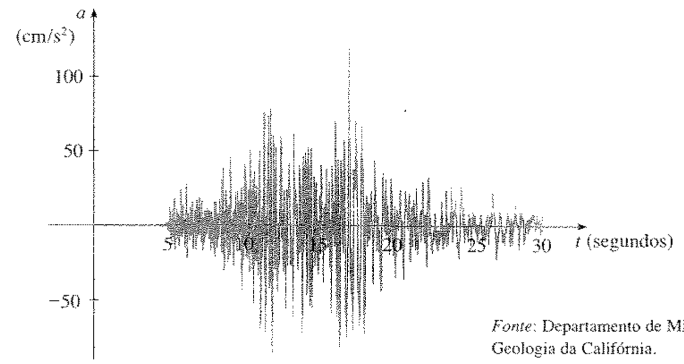


FIGURA 1

Aceleração vertical do solo durante o terremoto de Northridge

Fonte: Departamento de Minas e Geologia da Califórnia.

Cada um dos exemplos anteriores descreve uma lei segundo a qual, dado o número (r, t, w ou t), fica determinado outro número (A, P, C ou a). Em cada caso dizemos que o segundo número é uma função do primeiro.

Uma **função** f é uma lei a qual para cada elemento x em um conjunto A faz corresponder exatamente um elemento chamado $f(x)$, em um conjunto B.

Em geral consideramos as funções para as quais A e B são conjuntos de números reais. O conjunto A é chamado **domínio** da função. O número $f(x)$ é o **valor de f em x** e deve ser lido como "f de x". A **imagem** de f é o conjunto de todos os valores possíveis de $f(x)$ quando x varia por todo o domínio. O símbolo que representa um número arbitrário no *domínio* de uma função f é denominado **variável independente**, e o que representa um número qualquer na *imagem* de f é chamado de **variável dependente**. No Exemplo A, a variável r é independente, enquanto A é dependente.

É muito proveitoso considerar uma função como uma **máquina** (veja a Figura 2). Se x estiver no domínio da função f, quando x entrar na máquina, ele será aceito como *input*, e a máquina produzirá um *output* $f(x)$ de acordo com a lei que define a função. Assim, podemos pensar o domínio como o conjunto de todos os *inputs*, enquanto a imagem é o conjunto de todos os *outputs* possíveis.

$$\underset{(input)}{x} \longrightarrow f \longrightarrow \underset{(output)}{f(x)}$$

FIGURA 2
Diagrama de máquina para uma função f

As funções pré-programadas de sua calculadora são exemplos de funções como uma máquina. Por exemplo, a tecla de raiz quadrada em seu computador é uma dessas funções. Você pressiona a tecla $\sqrt{\ }$ (ou $\sqrt{x}$) e dá o *input* x. Se $x < 0$, então x não está no domínio dessa função; isto é, x não é um *input* aceitável, e a calculadora indicará um erro. Se $x \geqslant 0$, então uma *aproximação* de $\sqrt{x}$ aparecerá. Assim, a tecla $\sqrt{x}$ de sua calculadora não é exatamente a mesma coisa que a função matemática f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

Outra forma de ver a função é como um **diagrama de flechas**, como na Figura 3. Cada flecha conecta um elemento de A com um elemento de B. A flecha indica que $f(x)$ está associado a x, $f(a)$ a a etc.

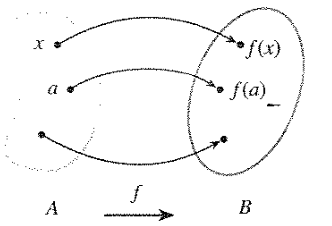


FIGURA 3
Diagrama de flechas para f

O método mais comum de visualizar uma função consiste em fazer seu gráfico. Se f for uma função com domínio A, então seu **gráfico** será o conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

(Observe que eles são os pares *input-output*.) Em outras palavras, o gráfico de f consiste em todos os pontos (x, y) do plano coordenado tais que $y = f(x)$ e x está no domínio de f.

O gráfico de uma função f nos dá uma imagem proveitosa do comportamento ou da "história de vida" de uma função. Uma vez que a coordenada y de qualquer ponto (x, y) sobre o gráfico é $y = f(x)$, podemos entender o valor $f(x)$ como a altura do ponto no gráfico acima de x (veja a Figura 4). O gráfico de f também nos permite visualizar o domínio sobre o eixo x e a imagem sobre o eixo y, como na Figura 5.

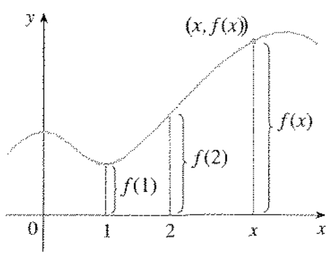


FIGURA 4

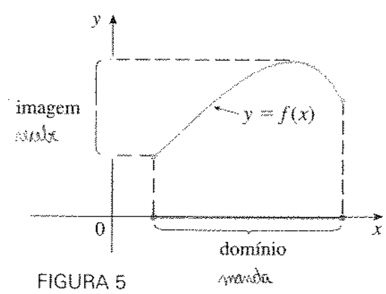


FIGURA 5

EXEMPLO 1 O gráfico de uma função f está na Figura 6.
(a) Encontre os valores de $f(1)$ e $f(5)$.
(b) Como são o domínio e a imagem de f?

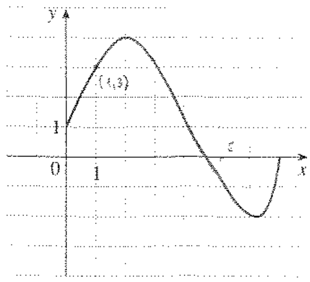


FIGURA 6

SOLUÇÃO
(a) Vemos da Figura 6 que o ponto $(1, 3)$ está sobre o gráfico de f, assim, o valor de f em 1 é $f(1) = 3$. (Em outras palavras, o ponto sobre o gráfico correspondente a $x = 1$ está três unidades acima do eixo x.)

Quando $x = 5$, o ponto sobre o gráfico que corresponde a esse valor está 0,7 unidade abaixo do eixo x e estimamos que $f(5) \approx -0{,}7$.

(b) Vemos que $f(x)$ está definida quando $0 \leqslant x \leqslant 7$, logo, o domínio de f é o intervalo fechado $[0, 7]$. Observe que os valores de f variam de -2 até 4; assim, a imagem de f é

$$\{y \mid -2 \leqslant y \leqslant 4\} = [-2, 4]$$

□ A notação para intervalos é dada no Apêndice A.

EXEMPLO 2 □ Esboce o gráfico e encontre o domínio e a imagem de cada função.
(a) $f(x) = 2x - 1$ (b) $g(x) = x^2$

SOLUÇÃO
(a) O gráfico tem equação $y = 2x - 1$, que reconhecemos ser a equação de uma reta com inclinação 2 e intercepto y igual a -1. (Lembre-se da equação da reta em sua forma inclinação–intercepto: $y = mx + b$. Veja o Apêndice B.) Isso nos possibilita esboçar o gráfico de f na Figura 7. A expressão $2x - 1$ está definida para todos os números reais; logo, seu domínio é todo esse conjunto denotado por $\mathbb{R}$. O gráfico mostra ainda que a imagem também é $\mathbb{R}$.

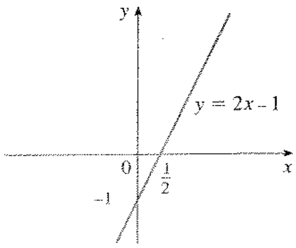


FIGURA 7

(b) Como $g(2) = 2^2 = 4$ e $g(-1) = (-1)^2 = 1$, podemos desenhar os pontos $(2, 4)$ e $(-1, 1)$ junto com alguns outros (sobre o gráfico), e ligá-los para produzir o gráfico da Figura 8. A equação do gráfico é $y = x^2$, que representa uma parábola (veja o Apêndice C). O domínio de g é $\mathbb{R}$. A imagem de g consiste em todos os valores de $g(x)$, isto é, todos os números da forma x^2. Mas $x^2 \geqslant 0$ para todos os números reais x e todo número positivo y é um quadrado. Assim, a imagem de g é $\{y \mid y \geqslant 0\} = [0, \infty)$ (veja a Figura 8).

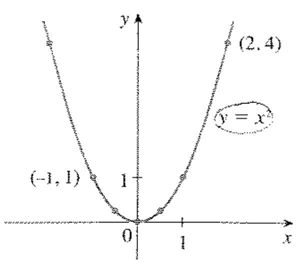


FIGURA 8

Representações de Funções

É possível representar uma função de quatro maneiras:

- verbalmente (descrevendo-a com palavras)
- numericamente (por meio de tabelas de valores)
- visualmente (através de gráficos)
- algebricamente (utilizando-se uma fórmula explícita)

Se uma função puder ser representada das quatro maneiras, então é proveitoso ir de uma representação para a outra, a fim de ganhar um *insight* adicional sobre a função. (No caso do Exemplo 2, partimos de fórmulas algébricas para obter os gráficos.) Porém, certas funções são descritas mais naturalmente por um método que por outro. Tendo isso em mente, vamos reexaminar as quatro situações consideradas no começo desta seção.

A. A mais útil dentre as representações da área de um círculo em função de seu raio é provavelmente a fórmula $A(r) = \pi r^2$, apesar de ser possível elaborar uma tabela de valores, bem como esboçar um gráfico (meia parábola). Como o raio do círculo deve ser positivo, o domínio da função é $\{r \mid r > 0\} = (0, \infty)$, e a imagem é $(0, \infty)$.

B. Seja dada a seguinte descrição em palavras de uma função: $P(t)$ é a população humana mundial no instante t. A tabela de valores da população mundial da página 11 nos fornece uma representação conveniente dessa função. Se desenharmos esses valores, vamos obter o gráfico da Figura 9 (chamado de *mapa de dispersão*). Ela é também uma representação útil, já que nos possibilita absorver todos os dados de uma vez. E o que dizer sobre uma fórmula para ela? Naturalmente é impossível dar uma fórmula exata para a população humana $P(t)$ em qualquer momento t. Porém, é possível encontrar uma expressão *aproximada* para ela. Usando métodos explicados na Seção 1.5 obtemos a aproximação

$$P(t) \approx f(t) = (0{,}008079266) \cdot (1{,}013731)^t$$

e a Figura 10 mostra que o "ajuste" é bem razoável. A função f é chamada *modelo matemático* para o crescimento populacional. Em outras palavras, é uma função com uma fórmula explícita, que aproxima o comportamento da função dada. Vamos ver que podemos aplicar as idéias do cálculo a tabelas de valores; não é necessária uma fórmula explícita.

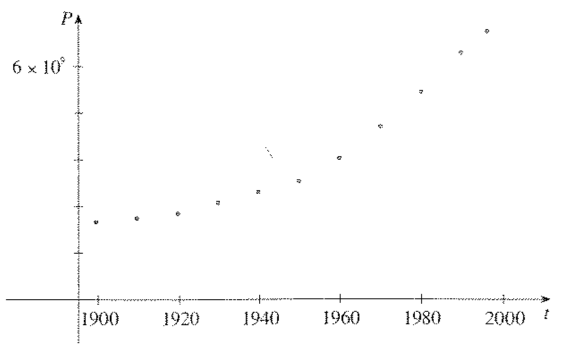


FIGURA 9

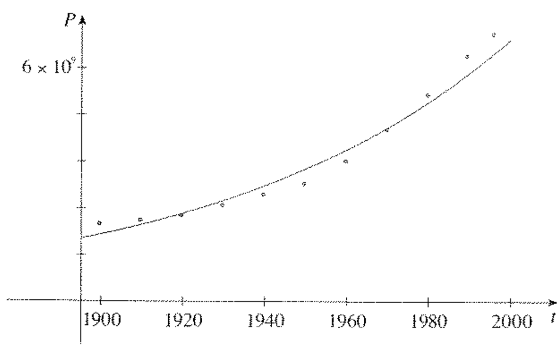


FIGURA 10

A função P é um exemplo típico das funções que aparecem sempre qu tentamos aplicar o cálculo ao mundo real. Começamos por uma descrição verbal d uma função. Então é possível que a partir de dados experimentais possamos constru as tabelas de valores da função. Mesmo que não tenhamos um conhecimento com pleto dos valores da função, veremos por toda a parte neste livro ser possível realiza operações de cálculo nessas funções.

◻ Uma função definida pela tabela de valores é estabelecida como uma função *tabular*.

w (onças)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leq 1$	0.37
$1 < w \leq 2$	0.60
$2 < w \leq 3$	0.83
$3 < w \leq 4$	1.06
$4 < w \leq 5$	1.29
⋮	⋮

C. Novamente a função é descrita em palavras: $C(w)$ é o custo de se enviar pel correio uma carta com um peso w. Nos Estados Unidos, em 2002, o serviço post seguia o seguinte regulamento: até uma onça (1 onça = 28,349523 gramas), o cust era de 37 centavos de dólar, e mais 23 centavos para cada onça sucessiva até 1 onças. A tabela de valores mostrada ao lado é a representação mais conveniente par essa função, embora seja possível esboçar seu gráfico (veja o Exemplo 10).

D. O gráfico na Figura 1 é a representação mais natural de uma aceleração vertic $a(t)$. Na realidade é possível compilar uma tabela de valores e até mesmo deline uma fórmula aproximada. Porém tudo o que um geólogo precisa saber — amplitud e padrões — pode facilmente ser obtido do gráfico. (O mesmo é válido tanto para o padrões de um eletrocardiograma como para o caso de um detector de mentiras As Figuras 11 e 12 mostram os gráficos das acelerações do terremoto de Northridg nas direções norte–sul e leste–oeste, e quando usadas em conjunção com a Figura elas nos dão uma boa idéia do terremoto.

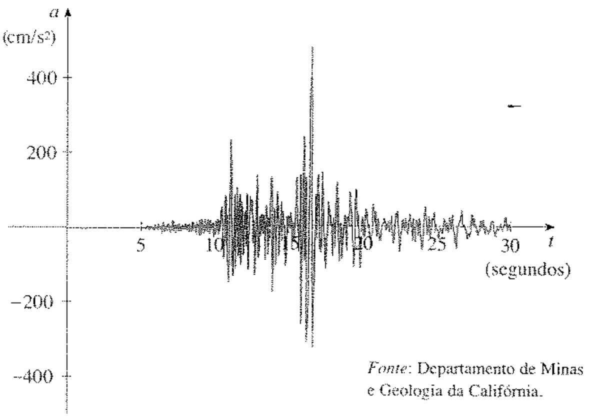


FIGURA 11 Aceleração norte–sul do terremoto de Northridge

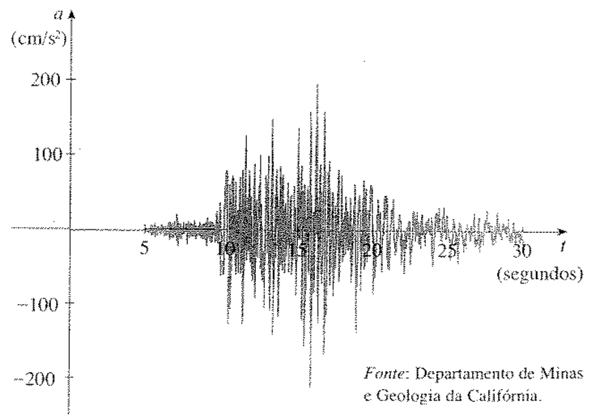


FIGURA 12 Aceleração leste–oeste do terremoto de Northridge

No próximo exemplo vamos esboçar o gráfico de uma função definida verbalmente.

EXEMPLO 3 ◻ Ao abrir uma torneira de água quente, a temperatura T da água depende do tempo decorrido desde a abertura. Esboce um gráfico de T como uma função do tempo t decorrido desde a abertura.

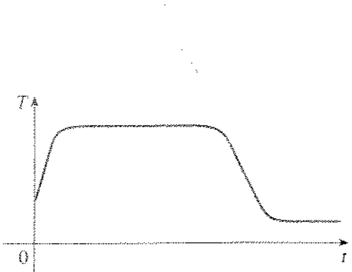


FIGURA 13

SOLUÇÃO A temperatura da água no começo está próxima da temperatura ambiente, pois ela estava nos canos. Quando começa a sair a água quente da caixa-d'água, T aumenta rapidamente, e na próxima fase fica constante até a caixa se esvaziar. A partir daí T decresce até a temperatura em que a água é fornecida. Isso nos possibilita esboçar o gráfico de T como uma função de t na Figura 13. ◻

Um gráfico mais preciso da função do Exemplo 3 pode ser obtido usando-se um termômetro para medir a temperatura da água em intervalos de 10 segundos. Em geral, os cientistas coletam os dados e os usam para esboçar os gráficos de funções, como no exemplo a seguir.

t	$C(t)$
0	0,0800
2	0,0570
4	0,0408
6	0,0295
8	0,0210

EXEMPLO 4 □ Os dados na margem vêm de um experimento sobre a lactonização do ácido hidroxivalérico a 25 °C. É dada a concentração $C(t)$ desse ácido (em mols por litro) após t minutos. Use esses dados para esboçar um gráfico aproximado da função concentração e o gráfico para estimar a concentração após 5 minutos.

SOLUÇÃO Primeiro vamos desenhar os cinco pontos correspondentes aos dados da tabela na Figura 14. Os métodos de ajustamento de curvas da Seção 1.2 poderão então ser utilizados para escolher um modelo e fazer um gráfico dele. Os dados da Figura 14, porém, parecem muito bem-comportados; assim, simplesmente traçamos à mão uma curva suave passando por eles, como na Figura 15.

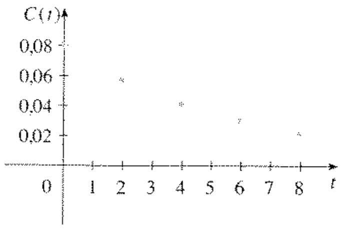


FIGURA 14

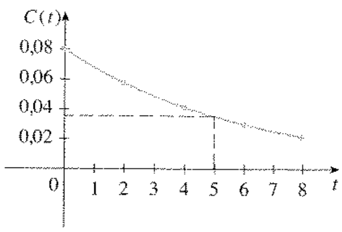


FIGURA 15

Então usamos o gráfico para estimar que a concentração após 5 minutos é

$$C(5) \approx 0{,}035 \text{ mol/litro}$$

No exemplo a seguir começamos por uma descrição verbal de uma função em uma situação física e depois obtemos uma fórmula algébrica explícita. A habilidade nessa transição é muito útil na solução de problemas de cálculo envolvendo a determinação de valores máximo ou mínimo de quantidades.

EXEMPLO 5 □ Uma caixa aberta em cima tem um volume de 10 m^3. O comprimento da base é o dobro da largura. O material da base custa \$ 10 por metro quadrado, ao passo que o material das laterais custa \$ 6 por metro quadrado. Expresse o custo total do material em função do tamanho da base.

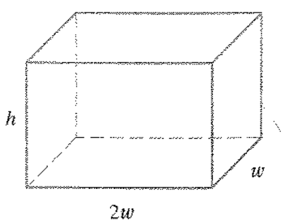


FIGURA 16

SOLUÇÃO Fazemos um diagrama como o da Figura 16, com uma notação onde w e $2w$ são, respectivamente, o comprimento e a largura da base, e h é a altura.

A área da base é $(2w)w = 2w^2$; assim, o custo, em dólares, é de $10(2w^2)$. Quanto aos lados, dois têm área wh e os outros dois, $2wh$. Portanto o custo total dos lados é $6[2(wh) + 2(2wh)]$. E o custo total é

$$C = 10(2w^2) + 6[2(wh) + 2(2wh)] = 20w^2 + 36wh$$

Para expressar C como uma função somente de w, precisamos eliminar h, o que é feito usando-se o fato de o volume ser 10 m^3. Dessa forma,

$$w(2w)h = 10$$

o que fornece

$$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}$$

:: Ao estabelecer as funções como as do Exemplo 5, pode ser proveitoso remeter-se aos princípios de resolução de problemas, conforme apresentado na página 80, em particular o passo *Entendendo o problema*.

Substituindo-se essa expressão na fórmula de C, temos

$$C = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{180}{w}$$

Logo, a equação

$$C(w) = 20w^2 + \frac{180}{w} \qquad w > 0$$

expressa C como uma função de w.

EXEMPLO 6 :: Encontre o domínio de cada função.

(a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

SOLUÇÃO

(a) Como a raiz quadrada de um número negativo não está definida (como um númer real), o domínio de f consiste em todos os valores de x tais que $x + 2 \geqslant 0$. Isso é equiva lente a $x \geqslant -2$; assim, o domínio é o intervalo $[-2, \infty)$.

:: Se uma função for dada por uma fórmula sem que seu domínio seja explicitado, presume-se que este seja o conjunto de todos os números para os quais a fórmula tem sentido e define um número real.

(b) Uma vez que

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x - 1)}$$

e a divisão por 0 não é permitida, vemos que $g(x)$ não está definida no caso de $x = 0$ o $x = 1$. Dessa forma, o domínio de g é

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

que também pode ser dado na notação de intervalo como

aberto

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

O gráfico de uma função é uma curva no plano xy. De imediato surge uma pergunta: Quai curvas no plano xy são gráficos de funções? Essa pergunta será respondida por meio d teste a seguir.

Teste da Reta Vertical Uma curva no plano xy é o gráfico de uma função de x se e somente se nenhuma reta vertical corta a curva mais de uma vez.

A razão da veracidade do Teste da Reta Vertical pode ser vista na Figura 17. Se cad reta vertical $x = a$ interceptar a curva somente uma vez, em (a, b), então exatamente un valor funcional está definido por $f(a) = b$. Mas se a reta $x = a$ interceptar a curva em doi pontos, em (a, b) e (a, c), nesse caso, a curva não pode representar uma função, pois um função não pode fazer corresponder dois valores diferentes para a.

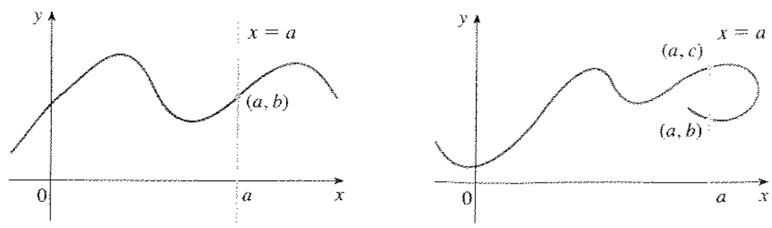


FIGURA 17

Por exemplo, a parábola $x = y^2 - 2$ na Figura 18(a) não é o gráfico de uma função de x, pois, como você pode ver, existem retas verticais que interceptam a parábola duas vezes. A parábola, no entanto, contém os gráficos de *duas* funções de x. Observe que $x = y^2 - 2$ implica $y^2 = x + 2$, e $y = \pm\sqrt{x+2}$. Dessa forma, a metade superior e a inferior da parábola são os gráficos de $f(x) = \sqrt{x+2}$ [do Exemplo 6(a)] e $g(x) = -\sqrt{x+2}$ [veja as Figuras 18(b) e (c)]. Note que se invertermos os papéis de x e y, então a equação $x = h(y) = y^2 - 2$ define x como uma função de y (com y como variável independente e x como variável dependente), e a parábola agora é o gráfico da função h.

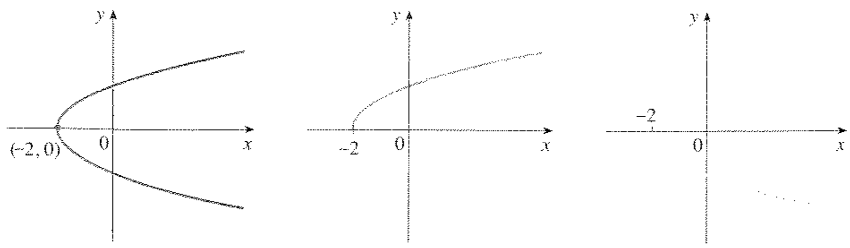


FIGURA 18

(a) $x = y^2 - 2$ (b) $y = \sqrt{x+2}$ (c) $y = -\sqrt{x+2}$

Funções Definidas por Partes

As funções nos quatro exemplos a seguir são definidas por fórmulas diversas em diferentes partes de seus domínios.

EXEMPLO 7 ▫ Seja f a função definida pelas fórmulas

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Calcule $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$ e esboce o gráfico.

SOLUÇÃO Lembre-se de que toda função é uma regra. Para essa função em particular a regra é a seguinte: olhe primeiro o valor do *input* x. Se tivermos que $x \leq 1$, então o valor de $f(x)$ será $1 - x$. Por outro lado, se o valor for $x > 1$, então o valor de $f(x)$ será x^2.

$$\text{Uma vez que } 0 \leq 1, \text{ temos } f(0) = 1 - 0 = 1.$$

$$\text{Uma vez que } 1 \leq 1, \text{ temos } f(1) = 1 - 1 = 0.$$

$$\text{Uma vez que } 2 > 1, \text{ temos } f(2) = 2^2 = 4.$$

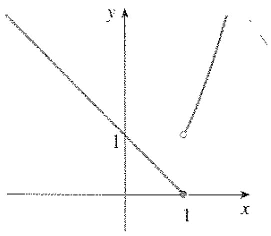


FIGURA 19

Como fazer o gráfico de f? Observamos que se $x \leq 1$, então $f(x) = 1 - x$, assim, a parte do gráfico f à esquerda da reta vertical $x = 1$ deve coincidir com a reta $y = 1 - x$, essa última com inclinação -1 e intercepto y igual a 1. Se $x > 1$, daí $f(x) = x^2$, e, dessa forma, a parte do gráfico f à direita da reta $x = 1$ deve coincidir com o gráfico de $y = x^2$, que é uma parábola. Tudo isso nos permite esboçar o gráfico da Figura 19. O pontinho cheio indica que o ponto $(1, 0)$ está incluso no gráfico; o vazio indica que o ponto $(1, 1)$ está excluído do gráfico. ▫

O próximo exemplo de função definida por partes é a função valor absoluto. Lembre-se de que o **valor absoluto** de um número a, denotado por $|a|$, é a distância de a até 0 sobre o eixo real. Como distâncias são sempre positivas ou nulas, temos

Para uma revisão mais ampla de valores absolutos, veja o Apêndice A.

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a$$

Por exemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

Em geral, temos

$$\boxed{\begin{array}{ll} |a| = a & \text{se } a \geqslant 0 \\ |a| = -a & \text{se } a < 0 \end{array}}$$

(Lembre-se de que se a for negativo, então $-a$ será positivo.)

EXEMPLO 8 Esboce o gráfico da função valor absoluto $f(x) = |x|$.

SOLUÇÃO Da discussão precedente sabemos que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

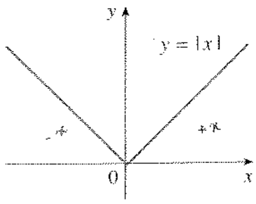


FIGURA 20

Usando o mesmo método empregado no Exemplo 7, vemos que o gráfico de f coincide com a reta $y = x$ à direita do eixo y e com a reta $y = -x$ à esquerda do eixo y (veja a Figura 20).

EXEMPLO 9 Encontre uma fórmula para a função f cujo gráfico está na Figura 21.

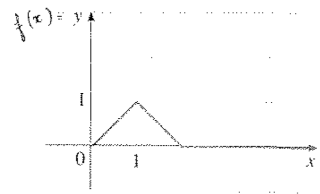


FIGURA 21

SOLUÇÃO A reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$ tem inclinação $m = 1$, e o intercepto y, $b = 0$; assim, sua equação é $y = x$. Logo, para a parte do gráfico de f que liga os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$, temos

$$f(x) = x \qquad \text{se} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

A forma ponto–inclinação da equação da reta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Veja o Apêndice B.

A reta que passa pelos pontos $(1, 1)$ e $(2, 0)$ tem uma inclinação de $m = -1$; dessa maneira, a forma ponto–inclinação será

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \qquad \text{ou} \qquad y = 2 - x$$

Logo temos

$$f(x) = 2 - x \qquad \text{se} \qquad 1 < x \leqslant 2$$

Vemos também que o gráfico de f coincide com o eixo x para $x > 2$. Juntando todas as informações, temos a seguinte fórmula em três partes para f:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

EXEMPLO 10 □ No Exemplo C, no início desta seção, consideramos o custo $C(w)$ do envio pelo correio de uma carta com peso w. Na realidade, trata-se de uma função definida por partes, pois a partir da tabela de valores temos

$$C(w) = \begin{cases} 0{,}37 & \text{se} \quad 0 < w \leq 1 \\ 0{,}60 & \text{se} \quad 1 < w \leq 2 \\ 0{,}83 & \text{se} \quad 2 < w \leq 3 \\ 1{,}06 & \text{se} \quad 3 < w \leq 4 \end{cases}$$

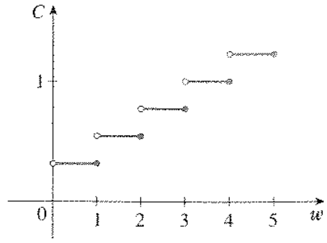


FIGURA 22

O gráfico é mostrado na Figura 22. Você pode entender então por que as funções similares a esta são chamadas **funções escada** – elas pulam de um valor para o próximo. Essas funções serão estudadas no Capítulo 2.

Simetrias

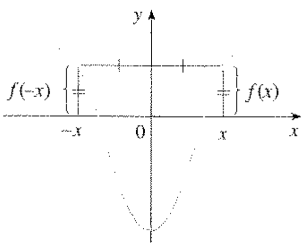


FIGURA 23
Uma função par

Se uma função f satisfizer $f(-x) = f(x)$ para todo x em seu domínio, então f é chamada **função par**. Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ é par, pois

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

O significado geométrico de uma função ser par é que seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y (veja a Figura 23). Isso significa que se fizermos o gráfico de f para $x \geq 0$, então, para obter o gráfico inteiro, basta refletir o que temos em torno do eixo y.

Se f satisfizer $f(-x) = -f(x)$ para todo número x em seu domínio, dizemos que f é uma **função ímpar**. Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ é ímpar, pois

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

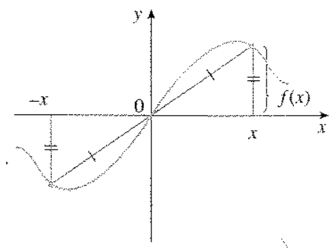


FIGURA 24
Uma função ímpar

O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem (veja a Figura 24). Se tivermos o gráfico de f para $x \geq 0$, poderemos obter o restante do gráfico girando 180°, o que já temos, em torno da origem.

EXEMPLO 11 □ Determine se a função é par, ímpar ou nenhum desses dois.
(a) $f(x) = x^5 + x$ (b) $g(x) = 1 - x^4$ (c) $h(x) = 2x - x^2$

SOLUÇÃO

(a)
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + (-x) = (-1)^5x^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Logo, f é uma função ímpar.

(b)
$$g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$$

Assim g é par.

(c) $$h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$$

Como $h(-x) \neq h(x)$ e $h(-x) \neq -h(x)$, concluímos que h não é par nem ímpar.

Os gráficos das funções do Exemplo 11 estão na Figura 25. Observe que o gráfico de h não é simétrico em relação ao eixo y nem em relação à origem.

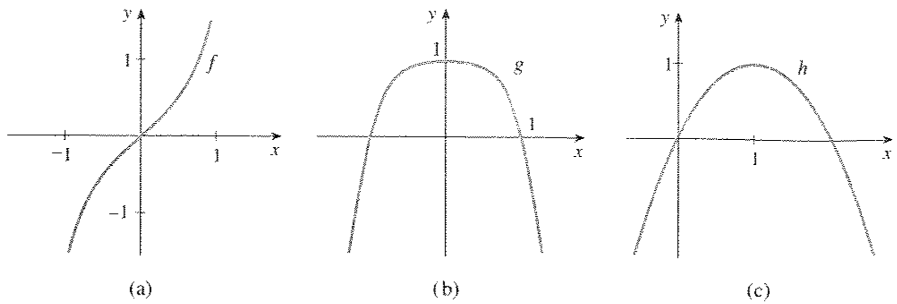


FIGURA 25

Funções Crescentes e Decrescentes

O gráfico da Figura 26 se eleva de A para B, cai de B para C, e sobe novamente de C para D. Dizemos que a função f é crescente no intervalo $[a, b]$, decrescente em $[b, c]$, e novamente crescente em $[c, d]$. Observe que se x_1 e x_2 forem dois números quaisquer entre a e b com $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$. Vamos usar isso como a propriedade que define uma função crescente.

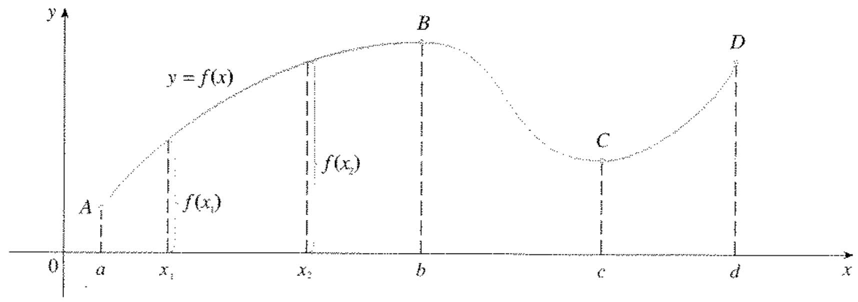


FIGURA 26

Uma função f é chamada **crescente** em um intervalo I se

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{sempre que } x_1 < x_2 \text{ em } I$$

Ela é denominada **decrescente** em I se

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{sempre que } x_1 < x_2 \text{ em } I$$

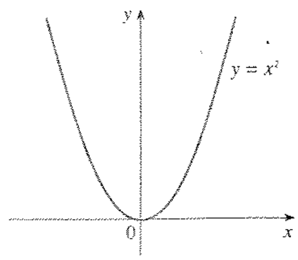


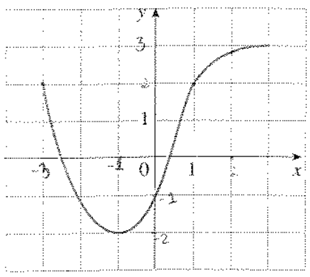
FIGURA 27

Na definição de função crescente é importante compreender que a desigualdade $f(x_1) < f(x_2)$ deve estar satisfeita para *todo* par de números x_1 e x_2 em I com $x_1 < x_2$.

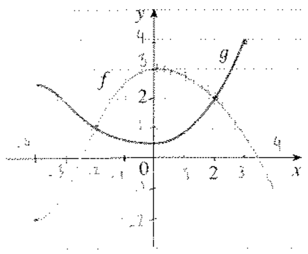
Você pode ver que na Figura 27 a função $f(x) = x^2$ é decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$ e crescente no intervalo $[0, \infty)$.

1.1 Exercícios

1. É dado o gráfico de uma função f.
   (a) Obtenha o valor de $f(-1)$.
   (b) Estime o valor de $f(2)$.
   (c) $f(x) = 2$ para quais valores de x?
   (d) Estime os valores de x para os quais $f(x) = 0$.
   (e) Obtenha o domínio e a imagem de f.
   (f) Em quais intervalos f é crescente?



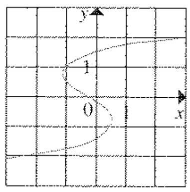
2. São dados os gráficos de f e g.
   (a) Obtenha os valores de $f(-4)$ e $g(3)$. $f(-4) = -2$ e $g(3) = 4$
   (b) $f(x) = g(x)$ para quais valores de x? -2 e 2
   (c) Estime a solução da equação $f(x) = -1$. 0,6
   (d) Em quais intervalos f é decrescente? [0,4]
   (e) Estabeleça o domínio e a imagem de f.
   (f) Obtenha o domínio e a imagem de g.

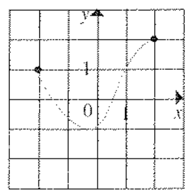


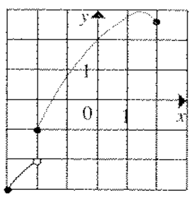
3. As Figuras 1, 11 e 12 foram registradas por um instrumento monitorado pelo Departamento de Minas e Geologia da Califórnia pertencente ao Hospital Universitário do Sul da Califórnia. Use-as para estimar as imagens das funções aceleração do solo na vertical, na direção norte–sul, na leste–oeste, na USC durante o terremoto de Northridge.

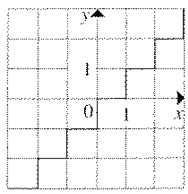
4. Nesta seção discutimos os exemplos de funções do dia-a-dia, como: a população é uma função do tempo; o custo da franquia postal, uma função do peso; a temperatura da água, do tempo. Dê três novos exemplos de funções cotidianas que possam ser descritas verbalmente. O que você pode dizer sobre o domínio e a imagem de cada uma dessas funções? Se possível, esboce um gráfico de cada uma delas.

5–8 Determine se a curva dada é o gráfico de uma função de x. Se for o caso, obtenha o domínio e a imagem da função.

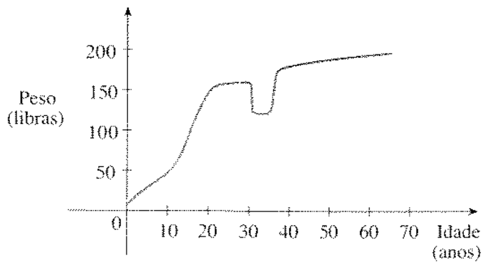
5.


6.


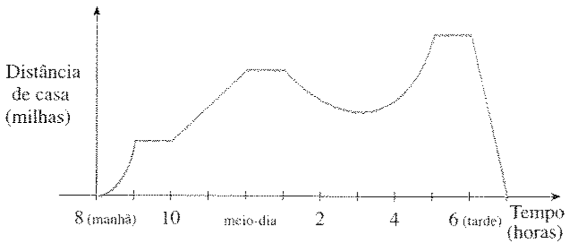
7.


8.


9. O gráfico mostra o peso de uma certa pessoa como uma função da idade. Descreva em palavras como o peso dessa pessoa varia com o tempo. O que você acha que está acontecendo aos 30 anos?



10. O gráfico mostra a distância que um caixeiro-viajante está de sua casa em um certo dia como uma função do tempo. Descreva em palavras o que o gráfico indica sobre suas andanças nesse dia.



11. Ponha cubos de gelo em um copo, encha-o com água gelada e deixe-o sobre uma mesa. Descreva como vai variar no tempo a temperatura da água. Esboce então um gráfico da temperatura da água como uma função do tempo decorrido.

12. Esboce um gráfico do número de horas diárias com a luz do sol como uma função do tempo no decorrer de um ano.

13. Esboce um gráfico da temperatura externa como uma função do tempo durante um dia típico de primavera na zona temperada do Hemisfério Norte.

14. Coloque uma torta gelada em um forno e asse-a por uma hora. Então tire-a do forno e deixe-a esfriar antes de comê-la. Descreva como varia no tempo a temperatura da torta. Esboce um gráfico da temperatura da torta como uma função do tempo.

15. Um homem apara seu gramado toda quarta-feira à tarde. Esboce o gráfico da altura da grama como uma função do tempo no decorrer de um período de quatro semanas.

16. Um avião vai de um aeroporto a outro em uma hora, e a distância entre eles é de 400 milhas. Se t representa o tempo em minutos desde a partida do avião, seja $x(t)$ a distância horizontal percorrida e $y(t)$ a altura do avião.
(a) Esboce um possível gráfico de $x(t)$.
(b) Esboce um possível gráfico de $y(t)$.
(c) Esboce um possível gráfico da velocidade no chão.
(d) Esboce um possível gráfico da velocidade na vertical.

17. Uma estimativa anual do número N (em milhares) de assinantes de telefones celulares na Malásia é mostrado na tabela

t	1991	1993	1995	1997
N	132	304	873	2.461

(a) Use os dados da tabela para esboçar o gráfico de N como uma função t.
(b) Use seu gráfico para estimar o número de assinantes de telefones celulares na Malásia nos anos de 1994 e 1996.

18. Os registros de temperatura T (em °F) foram tomados de duas em duas horas a partir da meia-noite até as 14 horas, em Dallas, em 2 de junho de 2001. O tempo foi medido em horas após a meia-noite.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	73	73	70	69	72	81	88	91

(a) Use os registros para esboçar um gráfico de T como uma função de t.
(b) Use seu gráfico para estimar a temperatura às 11 horas da manhã.

19. Se $f(x) = 3x^2 - x + 2$, encontre $f(2), f(-2), f(a), f(-a), f(a+1)$, $2f(a), f(2a), f(a^2), [f(a)]^2$ e $f(a+h)$.

20. Um balão esférico com raio de r polegadas tem o volume $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encontre uma função que represente a quantidade de ar necessária para inflar o balão de um raio r até um raio $r + 1$ polegadas.

21–22 Encontre $f(2+h)$, $f(x+h)$ e $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, onde $h \neq 0$.

21. $f(x) = x - x^2$

22. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

23–27 Encontre o domínio da função.

23. $f(x) = \dfrac{x}{3x-1}$

24. $f(x) = \dfrac{5x+4}{x^2+3x+2}$

25. $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt[3]{t}$

26. $g(u) = \sqrt{u} + \sqrt{4-u}$

27. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 5x}}$

28. Encontre o domínio e a imagem e esboce o gráfico da função $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

29–40 Encontre o domínio e esboce o gráfico da função.

29. $f(x) = 5$

30. $F(x) = \dfrac{1}{2}(x+3)$

31. $f(t) = t^2 - 6t$

32. $H(t) = \dfrac{4 - t^2}{2 - t}$

33. $g(x) = \sqrt{x - 5}$

34. $F(x) = |2x + 1|$

35. $G(x) = \dfrac{3x + x}{x}$

36. $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2}$

37. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leqslant 0 \\ x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x < -1 \\ 3 - x & \text{se } x \geqslant -1 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leqslant -1 \\ 3x + 2 & \text{se } |x| < 1 \\ 7 - 2x & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

41–46 Encontre uma expressão para a função cujo gráfico é a curva dada.

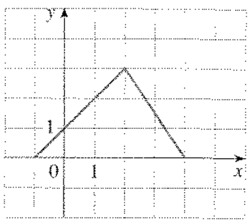
41. O segmento de reta unindo os pontos $(-2, 1)$ e $(4, -6)$.

42. O segmento de reta unindo os pontos $(-3, -2)$ e $(6, 3)$.

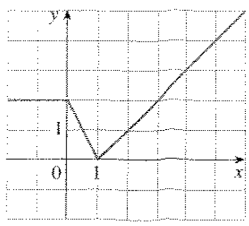
43. A parte de baixo da parábola $x + (y - 1)^2 = 0$.

44. A parte de cima do círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

45.



46.



47–51 □ Encontre uma fórmula para a função descrita e obtenha seu domínio.

47. Um retângulo tem um perímetro de 20 metros. Expresse a área do retângulo como uma função do comprimento de um de seus lados.

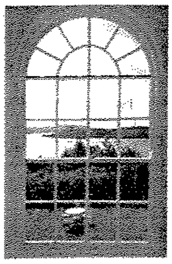
48. Um retângulo tem uma área de 16 m^2. Expresse o perímetro do retângulo como uma função do comprimento de um de seus lados.

49. Expresse a área de um triângulo eqüilátero como uma função do comprimento de um lado.

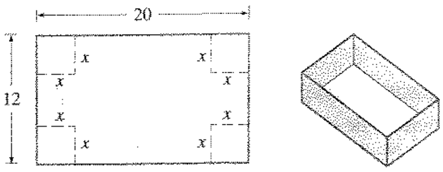
50. Expresse a área superficial de um cubo como uma função de seu volume.

51. Uma caixa retangular aberta com volume de 2 m^3 tem uma base quadrada. Expresse a área superficial da caixa como uma função do comprimento de um lado da base.

52. Uma janela normanda tem um formato de um retângulo em cima do qual se coloca um semicírculo. Se o perímetro de uma janela for de 30 pés, expresse a área A da janela como uma função de sua largura x.



53. Uma caixa sem a tampa deve ser construída de um pedaço retangular de papelão com dimensões 12 por 20 polegadas. Devem-se cortar os quadrados de lados x de cada canto e depois dobrar, conforme mostra a figura. Expresse o volume V da caixa como uma função de x.



54. Uma companhia de táxi cobra $ 2 pela primeira milha (ou fração dela) e 20 centavos a cada décimo de milha adicional (ou fração). Expresse o custo C (em $) de uma corrida como uma função da distância x percorrida (em milhas) para $0 < x < 2$ e esboce o gráfico.

55. Em um certo país, o imposto de renda é cobrado da seguinte forma. São isentos os que têm rendimento até $ 10.000. Para qualquer renda acima de $ 10.000 é cobrado um imposto de 10%, até $ 20.000. E acima de $ 20.000 o imposto é de 15%.

(a) Esboce o gráfico do imposto de renda R como uma função da renda I.

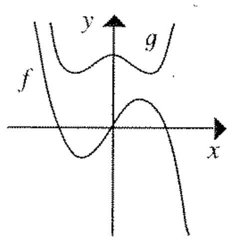
(b) Qual o imposto cobrado sobre um rendimento de $ 14.000? E sobre $ 26.000?

(c) Esboce o gráfico do imposto total cobrado T como uma função da renda I.

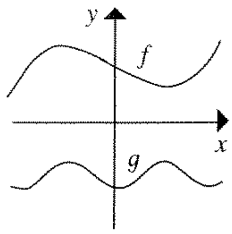
56. As funções no Exemplo 10 e nos Exercícios 54 e 55(a) são chamadas *funções escada*, em virtude do aspecto de seus gráficos. Dê dois outros exemplos de funções escada que aparecem no dia-a-dia.

57–58 □ Os gráficos de f e de g são mostrados a seguir. Verifique se cada função é par, ímpar ou nem par nem ímpar. Justifique seu raciocínio.

57.



58.



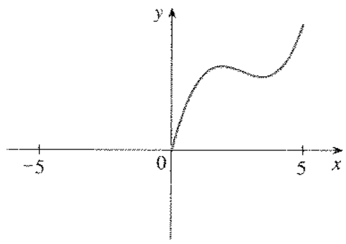
59. (a) Se o ponto (5, 3) estiver no gráfico de uma função par, que outro ponto também deverá estar no gráfico?

(b) Se o ponto (5, 3) estiver no gráfico de uma função ímpar, que outro ponto deverá também estar no gráfico?

60. Uma função f tem o domínio $[-5, 5]$ e é mostrada uma parte do seu gráfico.

(a) Complete o gráfico de f sabendo que ela é uma função par.

(b) Complete o gráfico de f sabendo que ela é uma função ímpar.



61–66 □ Determine se f é par, ímpar ou nenhum dos dois. Se f for par ou ímpar, use a simetria para esboçar seu gráfico.

61. $f(x) = x^{-2}$

62. $f(x) = x^{-3}$

63. $f(x) = x^2 + x$

64. $f(x) = x^4 - 4x^2$

65. $f(x) = x^3 - x$

66. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$

1.2 Modelos Matemáticos: Uma Relação de Funções Essenciais

Um **modelo matemático** é uma descrição matemática (freqüentemente por meio de uma função ou de uma equação) de um fenômeno do mundo real, como o tamanho de uma população, a demanda por um produto, a velocidade de um objeto caindo, a concentração de um produto em uma reação química, a expectativa de vida de uma pessoa ao nascer ou o custo da redução dos poluentes. O propósito do modelo é entender o fenômeno e talvez fazer predições sobre um comportamento futuro.

A Figura 1 ilustra o processo de modelagem matemática. Dado um problema do mundo real, nossa primeira tarefa é formular um modelo matemático por meio da identificação e especificação das variáveis dependentes e independentes e da realização de hipóteses que simplifiquem o fenômeno o suficiente para torná-lo matematicamente tratável. Usamos nosso conhecimento da situação física e nossa destreza matemática para obter as equações que relacionam as variáveis. Em situações em que não existe uma lei física para nos guiar, pode ser necessário coletar dados (de uma biblioteca, da Internet ou conduzindo nossos próprios experimentos) e examiná-los na forma de uma tabela, a fim de perceber os padrões. Dessa representação numérica de uma função podemos obter uma representação gráfica desenhando os dados. Esse gráfico pode até sugerir uma fórmula algébrica apropriada em alguns casos.

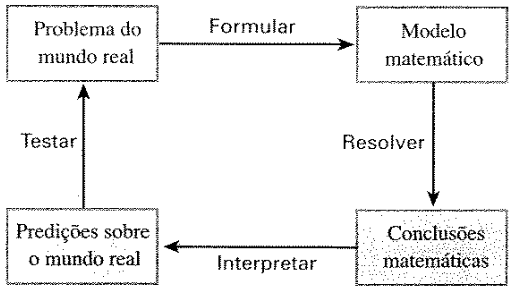


FIGURA 1
Processo de modelagem

O segundo estágio é aplicar a matemática que sabemos (tal como o cálculo a ser desenvolvido neste livro) ao modelo matemático que formulamos, a fim de tirar as conclusões. Então, em um terceiro estágio, interpretamos as conclusões matemáticas como informações sobre o fenômeno original e oferecemos explicações ou fazemos predições. A etapa final é testar nossas predições com o que acontece de novo no mundo real. Se as predições não se ajustam bem à realidade, precisamos refinar nosso modelo ou formular um novo modelo e começar novamente o ciclo.

Um modelo matemático nunca é uma representação completamente precisa de uma situação física — é uma *idealização*. Um bom modelo simplifica a realidade o bastante para permitir cálculos matemáticos, mantendo, porém, uma precisão suficiente para conclusões apreciáveis. É importante entender as limitações do modelo. A palavra final está com a Mãe Natureza.

Existem vários tipos diferentes de funções, as quais podem ser usadas para modelar as relações observadas no mundo real. A seguir, discutiremos o comportamento e os gráficos dessas funções, e daremos exemplos de situações modeladas apropriadamente por elas.

Modelos Lineares

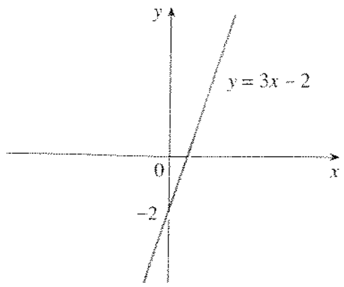
A coordenada geométrica das retas é revista no Apêndice B.

Quando dizemos que y é uma **função afim** de x, queremos dizer que o gráfico da função é uma reta; assim, podemos usar a forma inclinação–intercepto da equação de uma reta para escrever uma fórmula para a função, ou seja

$$y = f(x) = mx + b$$

onde m é o coeficiente angular da reta e b é o intercepto y.

Uma característica peculiar das funções afins é que elas variam a uma taxa constante. Por exemplo, a Figura 2 mostra o gráfico da função afim $f(x) = 3x - 2$ e uma tabela de valores amostrais. Note que quando x sofre um aumento em 0,1, o valor de $f(x)$ se eleva em 0,3. Dessa forma, $f(x)$ cresce três vezes mais rápido que x. Assim, a inclinação do gráfico de $y = 3x - 2$, isto é, 3, pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x.



x	$f(x) = 3x - 2$
1,0	1,0
1,1	1,3
1,2	1,6
1,3	1,9
1,4	2,2
1,5	2,5

FIGURA 2

EXEMPLO 1 □

(a) À medida que o ar seco move-se para cima ele se expande e esfria. Se a temperatura do solo for de 20 °C e a temperatura a uma altura de 1 km for de 10 °C, expresse a temperatura T (em °C) como uma função da altura h (em km), supondo que um modelo linear seja apropriado.

(b) Faça um gráfico da função na parte (a). O que representa a inclinação?

(c) Qual é a temperatura a 2,5 km de altura?

SOLUÇÃO

(a) Como estamos supondo que T é uma função linear de h, podemos escrever

$$T = mh + b$$

Nos é dado que $T = 20$ quando $h = 0$, assim,

$$20 = m \cdot 0 + b = b$$

Em outras palavras, o intercepto y é $b = 20$.

Também nos é dado que $T = 10$ quando $h = 1$, dessa forma,

$$10 = m \cdot 1 + 20$$

A inclinação da reta é, portanto, $m = 10 - 20 = -10$ e a função afim procurada é

$$T = -10h + 20$$

(b) O gráfico está esboçado na Figura 3. A inclinação é igual a $m = -10$ °C/km, e representa a taxa de variação da temperatura em relação à altura.

(c) A uma altura de $h = 2,5$ km, a temperatura é

$$T = -10(2,5) + 20 = -5 \text{ °C}$$

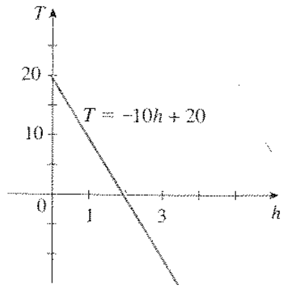


FIGURA 3

Se não existir uma lei física ou princípio que nos ajude a formular o modelo, construímos um **modelo empírico**, inteiramente baseado em dados coletados. Procuramos uma curva que se ajuste aos dados no sentido de que ela capte a tendência dos pontos dados.

TABELA 1

Ano	Nível de CO_2 (em ppm)
1980	338.7
1982	341.1
1984	344.4
1986	347.2
1988	351.5
1990	354.2
1992	356.4
1994	358.9
1996	362.6
1998	366.6
2000	369.4

EXEMPLO 2 A Tabela 1 fornece uma lista de níveis médios de dióxido de carbono na atmosfera, medidos em partes por milhão no Observatório de Mauna Loa, de 1980 a 2000. Use os dados da Tabela 1 para encontrar um modelo para o nível de dióxido de carbono.

SOLUÇÃO Vamos usar os dados da tabela para fazer um mapa de dispersão na Figura 4, onde t representa o tempo (em anos) e C, o nível de CO_2 (em ppm).

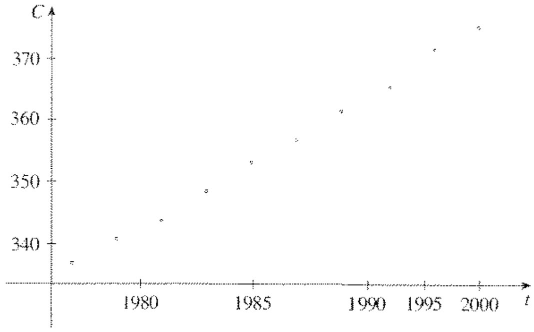


FIGURA 4
Mapa de dispersão para o nível médio de CO_2

Observe que os pontos estão muito próximos de uma linha reta; dessa forma, é natural escolher um modelo linear nesse caso. Porém, há inúmeras possibilidades de retas para aproximar esses pontos. Qual deveríamos usar? Do gráfico, vemos que uma possibilidade é a reta que passa pelo primeiro e o último pontos dados. A inclinação dessa reta é

$$\frac{369{,}4-338{,}7}{2000-1980}=\frac{30{,}7}{20}=1.535$$

e sua equação é

$$C-338{,}7=1{,}535\,(t-1980)$$

ou

$$\boxed{1} \qquad C=1{,}535t-2.700{,}6$$

A Equação 1 fornece um modelo linear possível para o nível de dióxido de carbono; seu gráfico está mostrado na Figura 5.

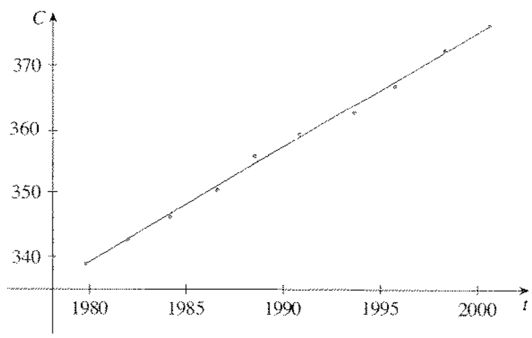


FIGURA 5
Modelo linear por meio do primeiro e do último pontos dados

Embora nosso modelo se ajuste razoavelmente aos dados, ele dá valores mais altos que a maior parte dos níveis reais de CO_2. Um modelo linear melhor é obtido por meio de um

◻ Um computador ou uma calculadora gráfica encontra a reta de regressão pelo Método dos Mínimos Quadráticos, que é minimizar a soma dos quadrados das distâncias verticais entre os pontos dados e a reta. Os detalhes serão esclarecidos na Seção 14.7 do Volume 2.

procedimento da estatística chamado *regressão linear*. Se utilizarmos uma calculadora gráfica, inserimos os dados da Tabela 1, e a calculadora escolhe o comando de regressão linear. (Com o *Maple* usamos o comando *fit[leastsquare]*; com o *Mathematica* empregamos o comando *Fit*.) A máquina dá a inclinação e o intercepto y da reta de regressão como

$$m = 1{,}53818 \qquad b = -2.707{,}25$$

Assim, nosso modelo de mínimos quadrados para o nível de CO_2 é

$$\boxed{2} \qquad C = 1{,}53818t - 2.707{,}25$$

Na Figura 6 fizemos o gráfico da reta de regressão e marcamos os pontos dados. Comparando-a com a Figura 5 vemos que ela fornece um ajuste melhor que o anterior para nosso modelo linear.

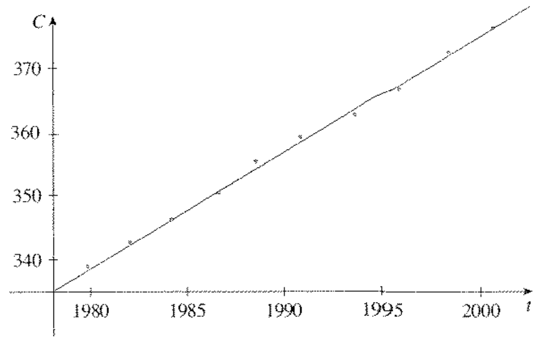


FIGURA 6
Reta de regressão

EXEMPLO 3 ◻ Use o modelo linear pela Equação 2 para estimar o nível médio de CO_2 em 1987 e predizer o nível do ano em 2010. De acordo com esse modelo, quando o nível de CO_2 excederá 400 ppm?

SOLUÇÃO Usando a Equação 2 com $t = 1987$, estimamos que o nível médio de CO_2 será

$$C(1987) = (1{,}53818)(1987) - 2.707{,}25 \approx 349{,}11$$

Esse é um exemplo de *interpolação*, pois estimamos um valor *entre* os valores observados. (De fato, o Observatório de Mauna Loa registrou em 1987 um nível médio de CO_2 de 348,93 ppm; assim, nossa estimativa é bem precisa.)

Com $t = 2010$, obtemos

$$C(2010) = (1{,}53818)(2010) - 2.707{,}25 \approx 384{,}49$$

Predizemos então que o nível médio de CO_2 no ano de 2010 será de 384,5 ppm. Esse é um exemplo de *extrapolação*, pois predizemos um valor *fora* da região de observações. Conseqüentemente, estamos muito menos seguros sobre a precisão dessa nossa predição.

Usando a Equação 2, vemos que o nível de CO_2 excederá 400 ppm quando

$$1{,}53818t - 2.707{,}25 > 400$$

Resolvendo essa desigualdade, obtemos

$$t > \frac{3.107{,}25}{1{,}53818} \approx 2.020{,}08$$

Portanto estamos predizendo que o nível de CO_2 vai exceder 400 ppm no ano 2020. Essa predição é um pouco arriscada, pois envolve um tempo bem distante de nossas observações.

Polinômios

Uma função P é denominada **polinômio** se

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde n é um inteiro não negativo, e os números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são constantes chamadas **coeficientes** do polinômio. O domínio de qualquer polinômio é $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Se o coeficiente dominante $a_n \neq 0$, então o **grau** do polinômio é n. Por exemplo, a função

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \tfrac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

é um polinômio de grau 6.

Um polinômio de grau 1 é da forma $P(x) = mx + b$ e, portanto, é uma função afim. Um polinômio de grau 2 é da forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ e é chamado **função quadrática**. O gráfico de P é sempre uma parábola obtida por translações da parábola $y = ax^2$, conforme veremos na próxima seção. A parábola abre-se para cima se $a > 0$ e para baixo quando $a < 0$. (Veja a Figura 7.)

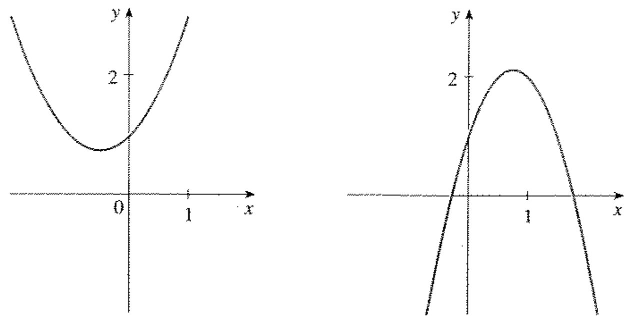


FIGURA 7
Os gráficos de funções quadráticas são parábolas

(a) $y = x^2 + x + 1$ (b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

Um polinômio de grau 3 tem a forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

e é chamado **função cúbica**. A Figura 8 mostra o gráfico de uma função cúbica na parte (a) e os gráficos dos polinômios de grau 4 e 5 nas partes (b) e (c). Vamos ver mais adiante por que os gráficos têm esses aspectos.

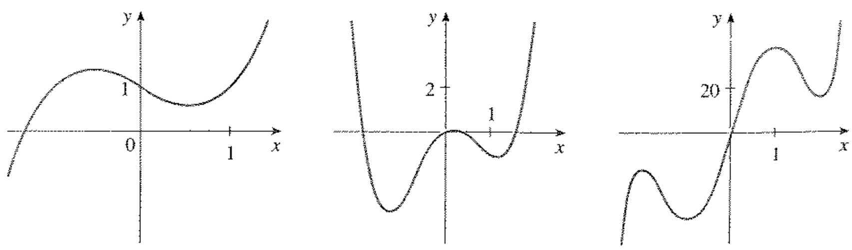


FIGURA 8

(a) $y = x^3 - x + 1$ (b) $y = x^4 - 3x^2 + x$ (c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

Os polinômios são usados comumente para modelar várias quantidades que ocorrem em ciências sociais e naturais. Por exemplo, na Seção 3.3 explicaremos por que os economistas freqüentemente usam um polinômio $P(x)$ para representar o custo na produção de x unidades de um produto. No exemplo a seguir vamos usar uma função quadrática para modelar a queda de uma bola.

TABELA 2

Tempo (segundos)	Altura (metros)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

EXEMPLO 4 □ Uma bola é deixada cair desde o topo da Torre CN, 450 m acima do chão, e sua altura h acima do solo é registrada em intervalos de 1 segundo na Tabela 2. Encontre um modelo para ajustar os dados e use-o para predizer o tempo após o qual a bola atinge o chão.

SOLUÇÃO Vamos fazer um gráfico de dispersão na Figura 9 e observar que um modelo linear não é apropriado. Parece que os pontos podem estar sobre uma parábola; assim, vamos tentar um modelo quadrático. Usando uma calculadora gráfica ou um CAS (que usa o método dos mínimos quadrados), obtemos o seguinte modelo quadrático:

$$\boxed{3} \qquad h = 449{,}36 + 0{,}96t - 4{,}90t^2$$

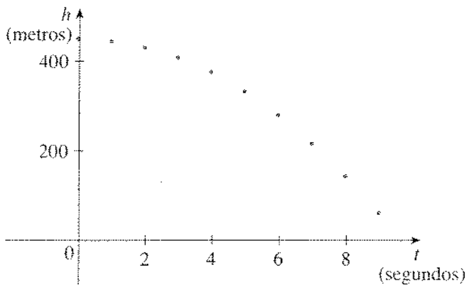


FIGURA 9
Mapa de dispersão para uma bola caindo

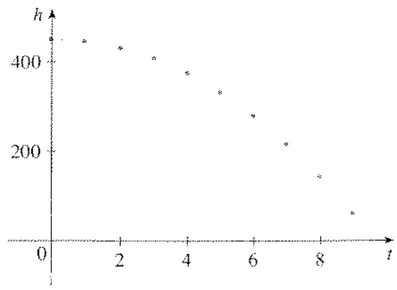


FIGURA 10
Modelo quadrático para uma bola caindo

Na Figura 10 fizemos um gráfico da Equação 3 junto com os pontos dados e vimos que o modelo quadrático fornece um ajuste muito bom.

A bola atinge o chão quando $h = 0$, assim resolvemos a equação quadrática

$$-4{,}90t^2 + 0{,}96t + 449{,}36 = 0$$

A fórmula quadrática fornece

$$t = \frac{-0{,}96 \pm \sqrt{(0{,}96)^2 - 4(-4{,}90)(449{,}36)}}{2(-4{,}90)}$$

A raiz positiva é $t \approx 9{,}67$; dessa forma, predizemos que a bola vai atingir o chão após 9,7 segundos.

Funções Potências

Uma função da forma $f(x) = x^a$, onde a é uma constante, é chamada **função potência**. Vamos considerar vários casos.

(i) $a = n$ onde n é um inteiro positivo

Os gráficos de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5 estão na Figura 11. (Esses são polinômios com um só termo.) Já conhecíamos os gráficos de $y = x$ (uma reta passando pela origem com inclinação 1) e $y = x^2$ [uma parábola – veja o Exemplo 2(b) da Seção 1.1].

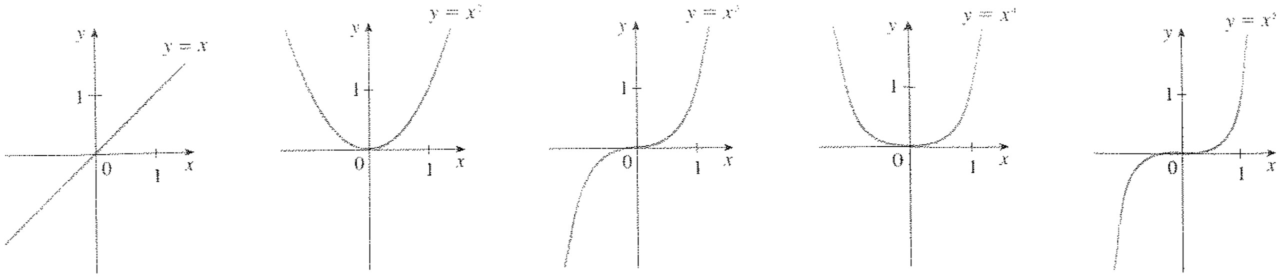


FIGURA 11 Gráficos de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5

A forma geral do gráfico de $f(x) = x^n$ depende de n ser par ou ímpar. Se n for par, então $f(x) = x^n$ será uma função par e seu gráfico é similar ao da parábola $y = x^2$. Se n for ímpar, então $f(x) = x^n$ será uma função ímpar e seu gráfico é similar ao de $y = x^3$. Observe na Figura 12, porém, que à medida que n cresce, o gráfico de $y = x^n$ torna-se mais achatado próximo de zero e mais inclinado quando $|x| \geqslant 1$. (Se x for pequeno, então x^2 é menor; x^3 será ainda menor; e x^4 será muito, mas muito menor, e assim por diante.)

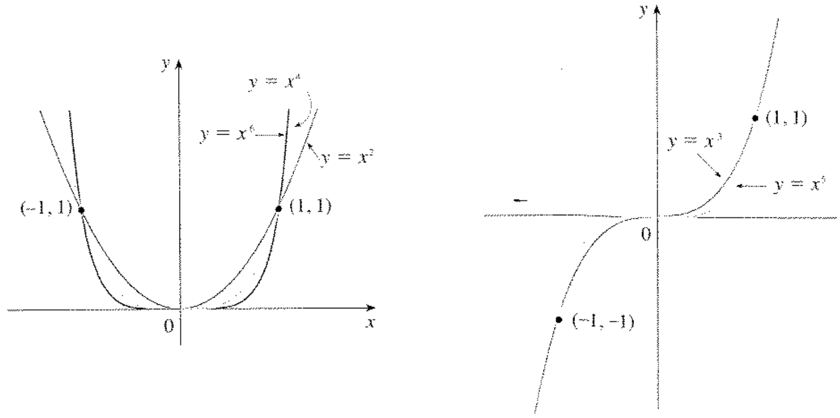
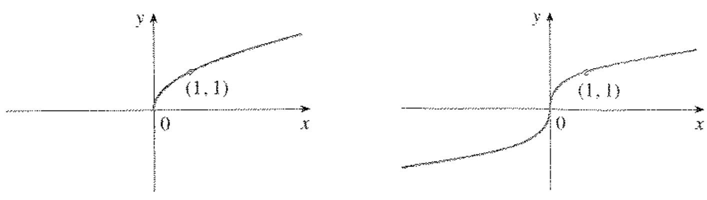


FIGURA 12
Famílias de funções potências

(ii) $a = 1/n$, **onde n é um inteiro positivo**

A função $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ é uma **função raiz**. Para $n = 2$, ela é a função raiz quadrada $f(x) = \sqrt{x}$, cujo domínio é $[0, \infty)$ e cujo gráfico é a parte superior da parábola $x = y^2$ [veja a Figura 13(a)]. Para outros valores pares de n, o gráfico de $y = \sqrt[n]{x}$ é similar ao de $y = \sqrt{x}$. Para $n = 3$, temos a função raiz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$ cujo domínio é $\mathbb{R}$ (lembre-se de que todo número real tem uma raiz cúbica) e cujo gráfico está na Figura 13(b). O gráfico de $y = \sqrt[n]{x}$ para n ímpar ($n > 3$) é similar ao de $y = \sqrt[3]{x}$.



(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

FIGURA 13
Gráficos das funções raízes

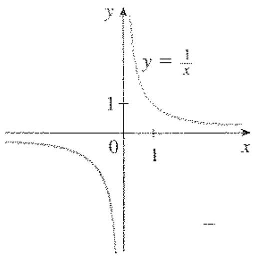


FIGURA 14
A função recíproca

(iii) $a = -1$
O gráfico da **função recíproca** $f(x) = x^{-1} = 1/x$ está na Figura 14. Seu gráfico tem a equação $y = 1/x$, ou $xy = 1$, e é uma hipérbole com eixos coordenados como suas assíntotas.

Essa função surge em física e química em conexão com a Lei de Boyle, que estabelece que, sendo constante a temperatura, o volume de um gás é inversamente proporcional à pressão:

$$V = \frac{C}{P}$$

onde C é uma constante. Assim, o gráfico de V como uma função de P (veja a Figura 15) tem o mesmo aspecto geral da metade à direita da Figura 14.

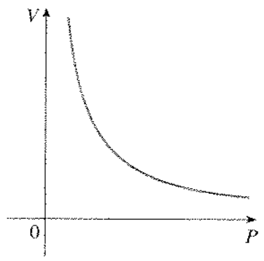


FIGURA 15
Volume como uma função da pressão à temperatura constante

Outro exemplo do uso da função potência na modelagem de um fenômeno físico é discutido no Exercício 22.

Funções Racionais

Uma **função racional** f é a razão de dois polinômios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios. O domínio consiste em todos os valores de x tais que $Q(x) \neq 0$. Um simples exemplo de uma função racional é a função $f(x) = 1/x$, cujo domínio é $\{x \mid x \neq 0\}$; esta é a função recíproca cujo gráfico está na Figura 14. A função

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

é uma função racional com domínio $\{x \mid x \neq \pm 2\}$. Seu gráfico está na Figura 16.

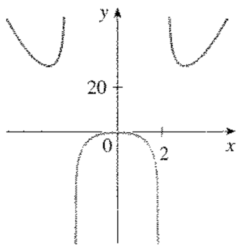


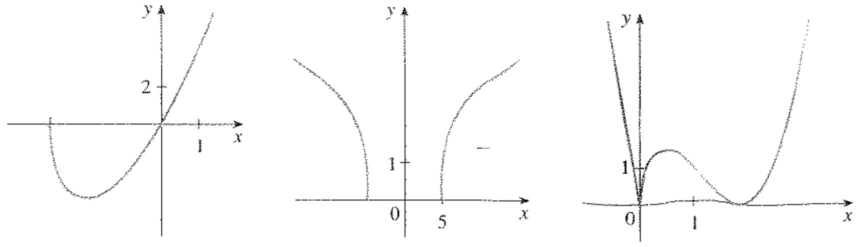
FIGURA 16
$f(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

Funções Algébricas

Uma função f é chamada **função algébrica** se puder ser construída usando-se operações algébricas (como adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes) começando com os polinômios. Toda função racional é automaticamente uma função algébrica. A seguir estão mais alguns exemplos:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}$$

Quando esboçarmos as funções algébricas no Capítulo 4 veremos que seus gráficos poder assumir uma variedade de formas. A Figura 17 ilustra algumas dessas possibilidades.



(a) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$ (c) $h(x) = x^{2/3}(x-2)^2$

FIGURA 17

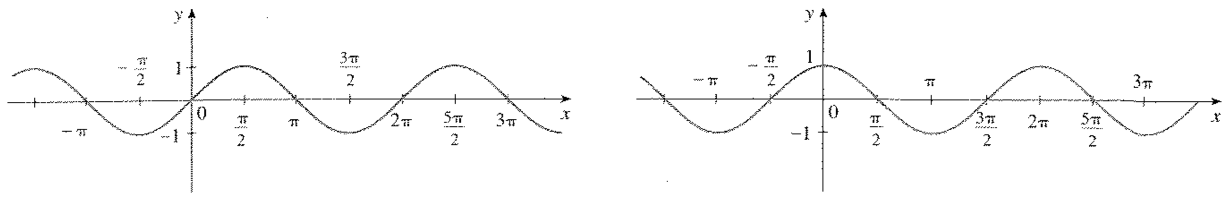
Um exemplo de função algébrica ocorre na Teoria da Relatividade. A massa de um partícula com uma velocidade v é

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa da partícula no repouso e $c = 3{,}0 \times 10^5$ km/s é a velocidade d luz no vácuo.

Funções Trigonométricas

Há uma revisão de trigonometria e de funções trigonométricas no Apêndice D. Em cálcul convencionamos usar sempre a medida de ângulos em radianos (exceto quando explicita mente mencionado). Por exemplo, quando utilizamos a função $f(x) = \operatorname{sen} x$, deve se entendido que sen x significa o seno de um ângulo cuja medida em radianos é x. Assim, o gráficos das funções seno e cosseno estão na Figura 18.



(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ (b) $g(x) = \cos x$

FIGURA 18

Observe que tanto para a função seno quanto para a função cosseno o domínio é $(-\infty, \infty$ e a imagem é o intervalo fechado $[-1, 1]$. Dessa forma, para todos os valores de x temos

$$\boxed{-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$$

ou, em termos de valores absolutos,

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant 1 \qquad |\cos x| \leqslant 1$$

Da mesma forma, os zeros da função seno ocorrem nos múltiplos inteiros de π: isto é,

$$\operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{quando} \qquad x = n\pi \quad n \text{ é um inteiro}$$

Uma propriedade importante das funções seno e cosseno é que elas são periódicas com um período 2π. Isso significa que, para todos os valores de x,

$$\boxed{\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x}$$

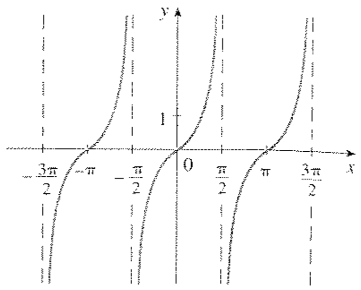


FIGURA 19

$y = \operatorname{tg} x$

A natureza periódica dessas funções torna-as adequadas à modelagem de fenômenos repetitivos, tais como marés, cordas vibrantes e ondas sonoras. Por exemplo, no Exemplo 4 da Seção 1.3 veremos que o modelo razoável para o número de horas com a luz solar na Filadélfia t dias após 1º de janeiro é dado pela função

$$L(t) = 12 + 2.8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

A função tangente relaciona-se com as funções seno e cosseno pela equação

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

e seu gráfico está na Figura 19. Ela não está definida quando $\cos x = 0$, isto é, quando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$. Sua imagem é $(-\infty, \infty)$.
Observe que a função tangente tem período π:

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x \qquad \text{para todo } x$$

As três funções trigonométricas remanescentes, cossecante, secante e cotangente, são as recíprocas das funções seno, cosseno e tangente. Seus gráficos estão no Apêndice D.

Funções Exponenciais

As **funções exponenciais** são da forma $f(x) = a^x$, onde a base a é uma constante positiva. Os gráficos de $y = 2^x$ e $y = (0{,}5)^x$ estão na Figura 20. Em ambos os casos o domínio é $(-\infty, \infty)$ e a imagem é $(0, \infty)$.

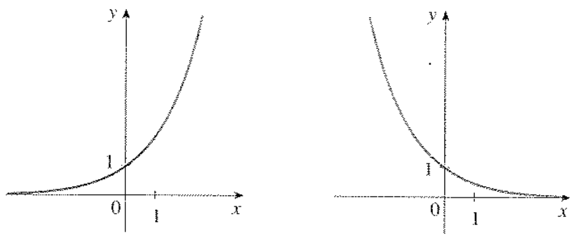


FIGURA 20

(a) $y = 2^x$ (b) $y = (0{,}5)^x$

As funções exponenciais serão estudadas em detalhes na Seção 1.5, e veremos que elas são úteis na modelagem de muitos fenômenos naturais, como crescimento populacional (se $a > 1$) e decaimento radioativo (se $a < 1$).

Funções Logarítmicas

As **funções logarítmicas** são $f(x) = \log_a x$, onde a base a é uma constante positiva. Elas são inversas das funções exponenciais e serão estudadas na Seção 1.6. A Figura 21 mostra os gráficos de quatro funções logarítmicas com várias bases. Em cada caso o domínio é $(0, \infty)$, a imagem é $(-\infty, \infty)$ e as funções crescem vagarosamente quando $x > 1$.

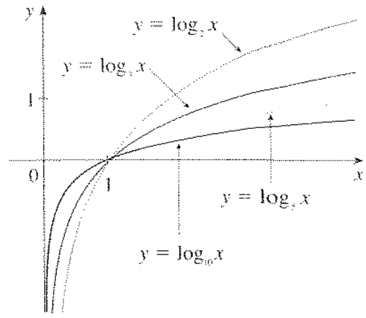


FIGURA 21

Funções Transcendentais

São as funções não algébricas. O conjunto das funções transcendentais inclui as funções trigonométricas, trigonométricas inversas, exponencial e logarítmica, mas também inclui um vasto número de outras funções que nunca tiveram um nome. No Capítulo 11, no Volume II, estudaremos as funções transcendentais, que são definidas como soma de séries infinitas.

EXEMPLO 5 □ Classifique as funções a seguir como um dos tipos discutidos.

(a) $f(x) = 5^x$ (b) $g(x) = x^5$

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ (d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

SOLUÇÃO

(a) $f(x) = 5^x$ é uma função exponencial. (x é o expoente.)

(b) $g(x) = x^5$ é a função potência. (x é a base.) Podemos também considerá-la um polinômio de grau 5.

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ é uma função algébrica.

(d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$ é um polinômio de grau 4.

1.2 Exercícios

1–2 □ Classifique cada função como uma função potência, função raiz, polinomial (estabeleça seu grau), função racional, função algébrica, função trigonométrica, função exponencial ou função logarítmica.

1. (a) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ (b) $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(c) $h(x) = x^9 + x^4$ (d) $r(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + x}$

(e) $s(x) = \operatorname{tg} 2x$ (f) $t(x) = \log_{10} x$

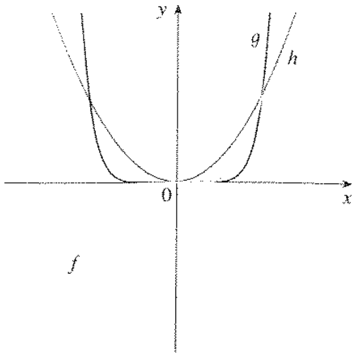
2. (a) $y = \dfrac{x - 6}{x + 6}$ (b) $y = x + \dfrac{x^2}{\sqrt{x - 1}}$

(c) $y = 10^x$ (d) $y = x^{10}$

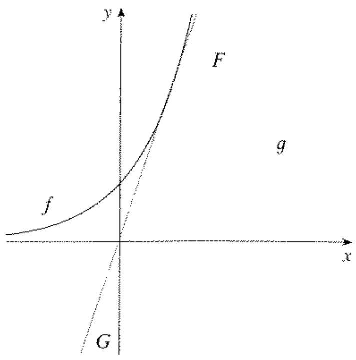
(e) $y = 2t^6 + t^4 - \pi$ (f) $y = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$

3–4 □ Associe cada equação a seu gráfico. Explique sua escolha. (Não use computador ou calculadora gráfica.)

3. (a) $y = x^2$ (b) $y = x^5$ (c) $y = x^8$



4. (a) $y = 3x$ (b) $y = 3^x$
(c) $y = x^3$ (d) $y = \sqrt[3]{x}$



5. (a) Encontre uma equação para uma família de funções lineares com inclinação 2 e esboce os gráficos de vários membros da família.
(b) Encontre uma equação para a família de funções lineares tais que $f(2) = 1$ e esboce os gráficos de vários membros da família.
(c) Quais funções pertencem a ambas as famílias?

6. O que todos os membros da família de funções lineares $f(x) = 1 + m\,(x + 3)$ têm em comum? Esboce o gráfico de vários membros da família.

7. O que todos os membros da família de funções lineares $f(x) = c - x$ têm em comum? Esboce os gráficos de vários membros da família.

8. Um administrador de mercado de pulgas sabe por experiência que se cobrar x dólares pelo aluguel de um espaço, então o número y de espaços que ele pode alugar é o dado pela equação $y = 200 - 4x$.
(a) Esboce o gráfico dessa função linear. (Lembre-se de que o aluguel cobrado pelo espaço e o número de espaços alugados não podem ser quantidades negativas.)
(b) O que representam a inclinação, o intercepto y e o intercepto x?

9. A relação entre as escalas de temperatura Fahrenheit (F) e Celsius (C) é dada pela função linear $F = \frac{9}{5}C + 32$.
(a) Esboce o gráfico dessa função.
(b) O que representa nesse gráfico a inclinação? O que representa o intercepto F do gráfico?

10. José deixa Detroit às 2 horas da tarde e guia a uma velocidade constante em direção a oeste pela rodovia I-96. Ele passa por Ann Arbor, a 40 milhas de Detroit, às 2h50 da tarde.
(a) Expresse a distância percorrida em termos do tempo decorrido.
(b) Esboce um gráfico da equação da parte (a).
(c) Qual é a inclinação dessa reta? O que ela representa?

11. Biólogos notaram que a taxa de cantos de uma certa espécie de grilo está relacionada com a temperatura de uma maneira que aparenta ser linear. Um grilo canta 113 vezes por minuto a 70 °F e 173 por minuto a 80 °F.
(a) Encontre uma equação linear que modele a temperatura T como uma função do número de cantos por minuto N.
(b) Qual é a inclinação do gráfico? O que ele representa?
(c) Se os grilos estiverem cantando 150 vezes por minuto, estime a temperatura.

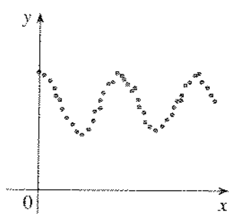
12. Um administrador de uma fábrica de móveis descobre que custa \$ 2.200 para fabricar 100 cadeiras em um dia e \$ 4.800 para produzir 300 cadeiras em um dia.
(a) Expresse o custo como uma função do número de cadeiras produzidas, supondo que ela seja linear. Então esboce o gráfico.
(b) Qual a inclinação do gráfico e o que ela representa?
(c) Qual o intercepto y do gráfico e o que ele representa?

13. Na superfície do oceano, a pressão da água é igual à do ar acima da água, 15 lb/pol². Abaixo da superfície, a pressão da água cresce em 4,34 lb/pol² para cada 10 pés de descida.
(a) Expresse a pressão da água como uma função da profundidade abaixo da superfície do oceano.
(b) A que profundidade a pressão é de 100 lb/pol²
(1 lb/pol² = 0,068046 atm = 703,07 kgf/m²)

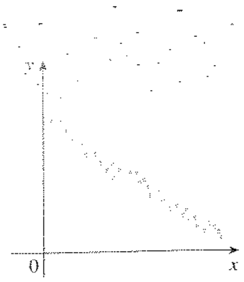
14. O custo mensal do uso de um carro depende do número de milhas rodadas. Lia descobriu que em maio ela gastou \$ 380 e guiou 480 milhas e, em junho, gastou \$ 460 e guiou 800 milhas.
(a) Expresse o custo mensal C como uma função da distância percorrida d, supondo que a relação linear forneça um modelo apropriado.
(b) Use a parte (a) para predizer o custo quando 1.500 milhas foram percorridas por mês.
(c) Esboce o gráfico da função. O que a inclinação representa?
(d) O que representa o intercepto y?
(e) Por que uma função é um modelo apropriado nessa situação?

15–16 □ Para cada marca de dispersão, decida qual tipo de função você escolheria como um modelo para os dados. Explique sua escolha.

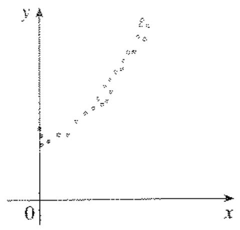
15. (a)



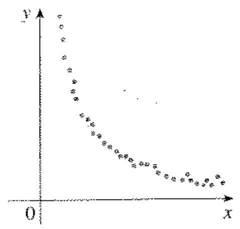
(b)



16. (a)



(b)



17. A tabela mostra as taxas de úlcera péptica (medida no decurso de toda vida) (a cada 100 habitantes), para várias rendas familiares, conforme reportado em 1989 pelo National Health Interview Survey.

Renda familiar	Taxa de úlcera (a cada 100 habitantes)
\$ 4.000	14.1
\$ 6.000	13.0
\$ 8.000	13.4
\$ 12.000	12.5
\$ 16.000	12.0
\$ 20.000	12.4
\$ 30.000	10.5
\$ 45.000	9.4
\$ 60.000	8.2

(a) Faça um mapa de dispersão desses dados e decida se um modelo linear é apropriado.
(b) Faça um gráfico de modelo linear usando o primeiro e o último pontos.
(c) Encontre e faça um gráfico da reta de regressão de mínimos quadrados.
(d) Use o modelo linear de (c) para estimar a taxa de úlcera correspondente a uma renda de \$ 25.000.
(e) De acordo com o modelo, qual a chance de alguém com uma renda de \$ 80.000 sofrer de úlcera péptica?
(f) Você acha razoável aplicar o modelo a alguém com uma renda de \$ 200.000?

18. Biólogos observaram que a taxa de canto dos grilos de uma certa espécie aparentemente está relacionada com a temperatura. A tabela mostra as taxas de canto para várias temperaturas.

Temperatura (°F)	Taxa de canto (cantos/min)
50	20
55	46
60	79
65	91
70	113
75	140
80	173
85	198
90	211

(a) Faça um mapa de dispersão dos dados.
(b) Encontre e faça um gráfico da reta de regressão.
(c) Use o modelo linear da parte (b) para estimar a taxa de canto a 100 °F.

19. A tabela dá as alturas dos vencedores do salto com vara nas Olimpíadas durante o século XX.

Ano	Altura (pés)	Ano	Altura (pés)
1900	10.83	1956	14.96
1904	11.48	1960	15.42
1908	12.17	1964	16,73
1912	12.96	1968	17.71
1920	13.42	1972	18.04
1924	12.96	1976	18.04
1928	13.77	1980	18.96
1932	14,15	1984	18.85
1936	14.27	1988	19,77
1948	14.10	1992	19.02
1952	14.92	1996	19.42

(a) Faça um mapa de dispersão e decida se um modelo linear é apropriado.
(b) Encontre e faça um gráfico da reta de regressão.
(c) Use o modelo linear para predizer qual a altura do vencedor nas Olimpíadas de 2000 e compare com a altura do vencedor de 19,36 pés.
(d) É razoável usar o modelo para predizer a altura do vencedor para as Olimpíadas de 2100?

20. Um estudo do U. S. Office of Science and Technology em 1972 estimou o custo para reduzir em certas porcentagens a emissão de poluentes pelos automóveis:

Redução nas emissões (%)	Custo por carro (em \$)	Redução nas emissões (%)	Custo por carro (em \$)
50	45	75	90
55	55	80	100
60	62	85	200
65	70	90	375
70	80	95	600

Encontre um modelo que capte a tendência de "rendimentos decrescentes" desses dados.

21. Use os dados da tabela para modelar a população mundial no século XX por uma função cúbica. Então utilize seu modelo para estimar a população no ano de 1925.

Ano	População (milhões)
1900	1.650
1910	1.750
1920	1.860
1930	2.070
1940	2.300
1950	2.560
1960	3.040
1970	3.710
1980	4.450
1990	5.280
2000	6.080

22. A tabela mostra a média das distâncias d dos planetas ao Sol (tomando a unidade de medida para ser a distância da Terra ao Sol) e seus períodos T (tempo de revolução em anos).

Planeta	d	T
Mercúrio	0.387	0.241
Vênus	0.723	0.615
Terra	1.000	1.000
Marte	1.523	1.881
Júpiter	5.203	11.861
Saturno	9.541	29.457
Urano	19.190	84.008
Netuno	30.086	164.784
Plutão	39.507	248.350

(a) Ajuste um modelo de função potência aos dados.

(b) A Terceira Lei de Kepler para o Movimento Planetário estabelece que "O quadrado do período da revolução de um planeta é proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol". Seu modelo confirma a Terceira Lei de Kepler?

1.3 Novas Funções a partir de Antigas

Nesta seção partimos das funções definidas na Seção 1.2 e obtemos novas funções por deslocamento, esticamento e reflexão de seus gráficos. Vamos mostrar também como combinar pares de funções por meio de operações aritméticas ordinárias e por composição.

Transformação de Funções

Aplicando certas transformações aos gráficos de uma função dada obtemos o gráfico de funções correlacionadas, o que nos capacita fazer o esboço de muitas funções à mão. Vamos considerar inicialmente as **translações**. Se c for um número positivo, então o gráfico de $y = f(x) + c$ é precisamente o gráfico de $y = f(x)$ deslocado para cima em c unidades (uma vez que cada coordenada y fica acrescida pelo mesmo número c). Da mesma forma, se fizermos $g(x) = f(x - c)$, onde $c > 0$, então o valor de g em x é igual ao valor de f em $x - c$ (c unidades à esquerda de x). Portanto o gráfico de $y = f(x - c)$ é precisamente o de $y = f(x)$ deslocado de c unidades para a direita (veja a Figura 1).

Deslocamentos Verticais e Horizontais Suponha $c > 0$. Para obter o gráfico de
$y = f(x) + c$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para cima
$y = f(x) - c$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para baixo
$y = f(x - c)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para a direita
$y = f(x + c)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para a esquerda

Vamos considerar agora as transformações de **esticamento** e **reflexão**. Se $c > 1$, então o gráfico de $y = cf(x)$ é o gráfico de $y = f(x)$ esticado por um fator c na direção vertical (pois cada coordenada y fica multiplicada pelo mesmo número c). O gráfico de $y = -f(x)$

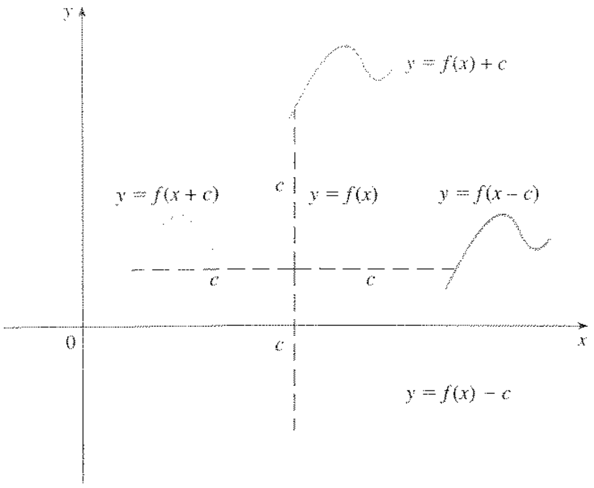


FIGURA 1
Translações do gráfico de f

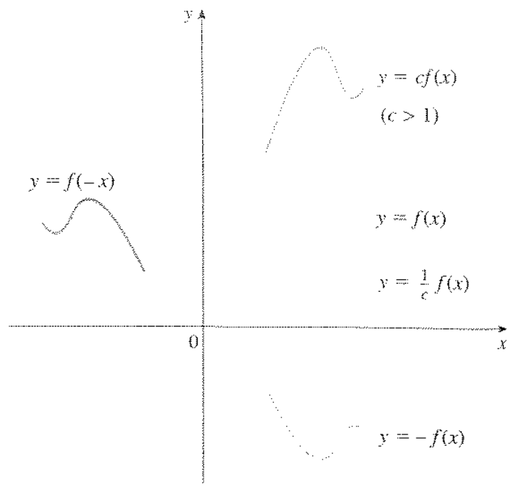


FIGURA 2
Esticamentos e reflexões do gráfico de f

é o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo x, pois o ponto (x, y) será substituído pelo pont $(x, -y)$. (Veja a Figura 2 e a tabela a seguir, onde estão os resultados de várias transfor mações de esticamentos, compressão e reflexão.)

Reflexões e Esticamentos Horizontais e Verticais Suponha $c > 1$. Para obter o gráfico de
$y = cf(x)$, estique o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c
$y = (1/c)\, f(x)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c
$y = f(cx)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c
$y = f(x/c)$, estique o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c
$y = -f(x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo x
$y = f(-x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo y

A Figura 3 ilustra essas transformações de esticamento quando aplicadas à funçã cosseno com $c = 2$. Por exemplo, para obter o gráfico $y = 2\cos x$, multiplicamos as coor denadas y de cada ponto do gráfico de $y = \cos x$ por 2. Isso significa que o gráfico d $y = \cos x$ fica esticado verticalmente por um fator de 2.

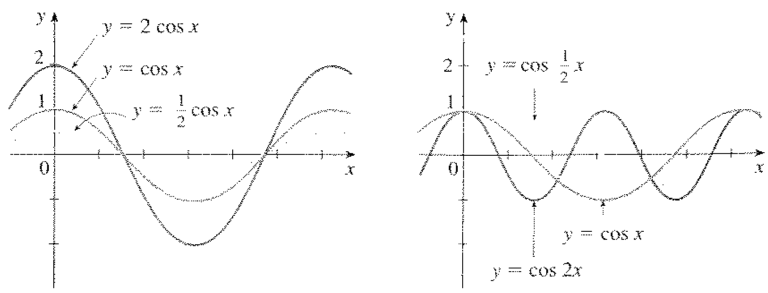
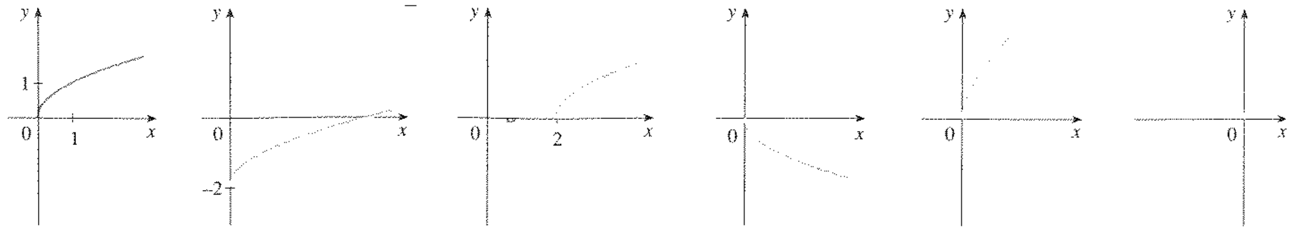


FIGURA 3

EXEMPLO 1 □ Dado o gráfico de $y = \sqrt{x}$, use as transformações para obter os gráficos de $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x - 2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, e $y = \sqrt{-x}$.

SOLUÇÃO O gráfico da função raiz quadrada $y = \sqrt{x}$, obtido da Figura 13 na Seção 1.2, está mostrado na Figura 4(a). Nas outras partes da figura esboçamos $y = \sqrt{x} - 2$ deslocando 2 unidades para baixo; $y = \sqrt{x - 2}$ deslocando 2 unidades para a direita; $y = -\sqrt{x}$ refletindo em torno de eixo x; $y = 2\sqrt{x}$ esticando verticalmente por um fator de 2; e $y = \sqrt{-x}$ refletindo em torno do eixo y.



(a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = \sqrt{x} - 2$ (c) $y = \sqrt{x-2}$ (d) $y = -\sqrt{x}$ (e) $y = 2\sqrt{x}$ (f) $y = \sqrt{-x}$

FIGURA 4

EXEMPLO 2 □ Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

SOLUÇÃO Completando o quadrado, escrevemos a equação do gráfico como

$$y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

Isso significa que obtemos o gráfico desejado começando com a parábola $y = x^2$ e deslocando-a 3 unidades para a esquerda e então 1 unidade para cima (veja a Figura 5).

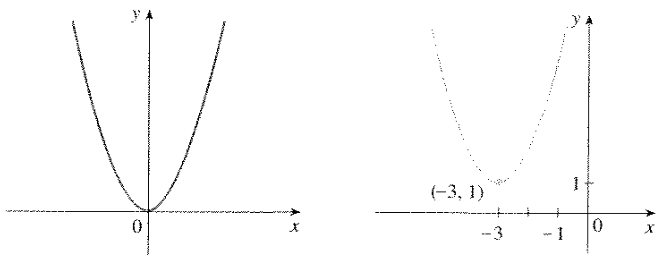


FIGURA 5

(a) $y = x^2$ (b) $y = (x + 3)^2 + 1$

EXEMPLO 3 □ Esboce os gráficos das seguintes funções.

(a) $y = \text{sen}\, 2x$ (b) $y = 1 - \text{sen}\, x$

SOLUÇÃO

(a) Obtemos o gráfico $y = \text{sen}\, 2x$ a partir de $y = \text{sen}\, x$ comprimindo horizontalmente esse último por um fator de 2 (veja as Figuras 6 e 7). Assim, enquanto o período de $y = \text{sen}\, x$ é 2π, o período de $y = \text{sen}\, 2x$ é $2\pi/2 = \pi$.

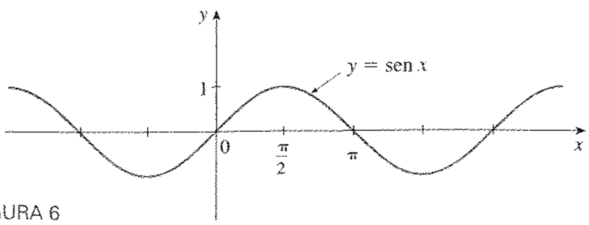


FIGURA 6

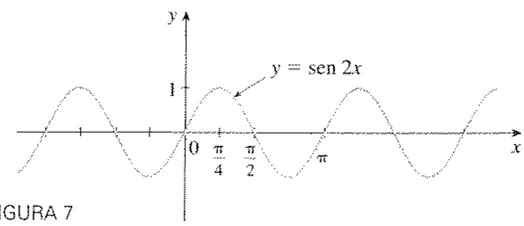


FIGURA 7

(b) Para obter o gráfico de $y = 1 - \operatorname{sen} x$, começamos novamente com $y = \operatorname{sen} x$. Refletimos em torno do eixo x para obter o gráfico de $y = -\operatorname{sen} x$ e então deslocamos uma unidade para cima para obter $y = 1 - \operatorname{sen} x$ (veja a Figura 8).

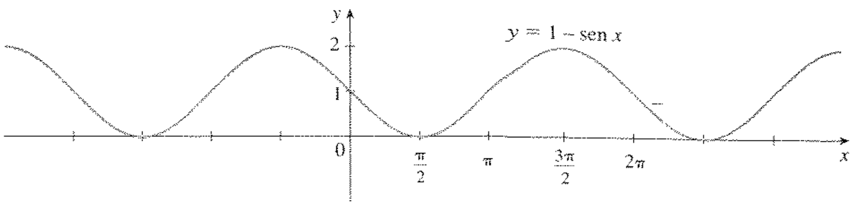
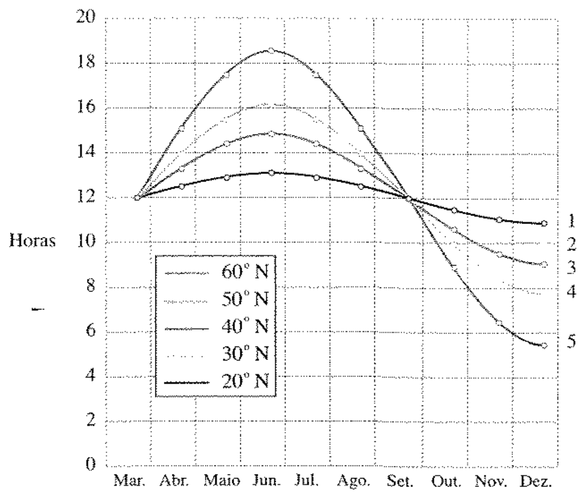


FIGURA 8

EXEMPLO 4 A Figura 9 mostra vários números de horas de luz solar como uma função da época em diversas latitudes. Dado que a Filadélfia está localizada a aproximadamente 40 °N latitude, encontre uma função que modele a duração da luz solar durante os dias nessa cidade.



Fonte: Lucia C. Harrison. *Daylight, Twilight, Darkness and Time* (Nova York: Silver, Burdett, 1935, p. 40.)

FIGURA 9

Gráfico da extensão da luz solar durante o dia, de 21 de março a 21 de dezembro em várias latitudes.

SOLUÇÃO Observe que cada curva assemelha-se à função seno deslocada e esticada. Olhando a curva número 3 notamos que, na latitude de Filadélfia à luz do dia, dura cerca de 14,8 horas em 21 de junho e 9,2 horas em 21 de dezembro; assim, a amplitude da curva (o fator pelo qual esticamos verticalmente a curva do seno) é $\frac{1}{2}(14{,}8 - 9{,}2) = 2{,}8$.

Por qual fator deveremos esticar horizontalmente a curva do seno se a medida do tempo t for em dias? Como temos cerca de 365 dias em um ano, o período de nosso modelo deve ser de 365 dias. Mas o período de $y = \operatorname{sen} t$ é 2π; dessa forma, o fator de esticamento horizontal é $c = 2\pi/365$.

Notamos também que a curva começa seu ciclo em 21 de março, 80º dia do ano, e então devemos deslocar a curva em 80 unidades para a direita. Além disso, deslocamos em 12 unidades para cima. Assim sendo, modelamos o comprimento dos dias na Filadélfia no t-ésimo dia do ano pela função

$$L(t) = 12 + 2{,}8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Outra transformação de algum interesse é tomar o valor absoluto de uma função. S $y = |f(x)|$, então, de acordo com a definição de valor absoluto, $y = f(x)$ quando $f(x) \geqslant$ (

e $y = -f(x)$ quando $f(x) < 0$. Isso nos mostra como obter o gráfico de $y = |f(x)|$ a partir do gráfico de $y = f(x)$: a parte do gráfico que está acima do eixo x permanece a mesma; enquanto a parte que está abaixo do eixo x é refletida em torno do eixo x.

EXEMPLO 5 □ Esboce o gráfico da função $y = |x^2 - 1|$.

SOLUÇÃO Primeiro fazemos o gráfico da parábola $y = x^2 - 1$ como na Figura 10(a) deslocando para baixo em uma unidade a parábola $y = x^2$. Vemos que o gráfico está abaixo do eixo x quando $-1 < x < 1$; assim, refletimos essa parte do gráfico em torno do eixo x para obter o gráfico de $y = |x^2 - 1|$ na Figura 10(b).

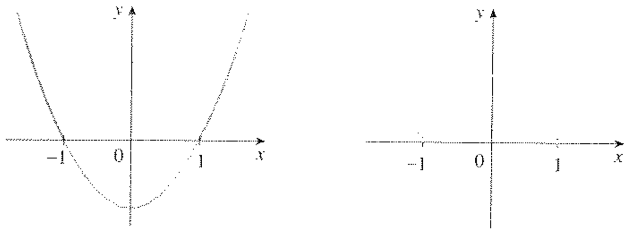


FIGURA 10 (a) $y = x^2 - 1$ (b) $y = |x^2 - 1|$

Combinações de Funções

Duas funções f e g podem ser combinadas para formar novas funções $f + g$, $f - g$, fg e f/g de forma similar àquela pela qual somamos, subtraímos, multiplicamos e dividimos números reais.

Definimos a soma $f + g$ pela equação

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \tag{1}$$

então o lado direito da Equação 1 faz sentido se $f(x)$ e $g(x)$ estiverem definidas, isto é, se x pertencer ao domínio de f e também de g. Se o domínio de f é A e o de g é B, então o domínio $f + g$ será a interseção desses domínios, isto é, $A \cap B$.

Observe que o sinal $+$ do lado esquerdo da Equação 1 significa a operação de adição de *funções*, mas o sinal $+$ do lado direito da equação significa a operação de adição dos *números* $f(x)$ e $g(x)$.

Da mesma forma, definimos a diferença $f - g$ e o produto fg, e seus domínios são também $A \cap B$. Mas ao definir o quociente f/g devemos lembrar que não é possível dividir por zero.

Álgebra de Funções Sejam f e g funções com domínios A e B. Então as funções $f + g$, $f - g$, fg e f/g estão definidas da seguinte forma:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{domínio} = A \cap B$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{domínio} = A \cap B$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \text{domínio} = A \cap B$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{domínio} = \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$$

EXEMPLO 6 Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, encontre as funções $f + g$, $f - g$, fg e f/g.

SOLUÇÃO O domínio de $f(x) = \sqrt{x}$ é $[0, \infty)$. O domínio de $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ consiste em todos os números x tais que $4 - x^2 \geqslant 0$, isto é, $x^2 \leqslant 4$. Tomando as raízes quadradas em ambos os lados, obtemos $|x| \leqslant 2$ ou $-2 \leqslant x \leqslant 2$, assim, o domínio de g é o intervalo $[-2, 2]$. A interseção dos domínios de f e g é

Outra maneira de resolver $4 - x^2 \geqslant 0$:

$(2 - x)(2 + x) \geqslant 0$

$$\begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ \hline & -2 & & 2 & \end{array}$$

$$[0, \infty) \cap [-2, 2] = [0, 2]$$

Dessa forma, de acordo com as definições temos

$$(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

$$(f - g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{4 - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

$$(fg)(x) = \sqrt{x}\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4x - x^3} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4 - x^2}} = \sqrt{\frac{x}{4 - x^2}} \qquad 0 \leqslant x < 2$$

Observe que o domínio de f/g é o intervalo $[0, 2)$, pois precisamos excluir $x = 2$, uma vez que $g(2) = 0$.

O gráfico da função $f + g$ é obtido a partir dos de f e g por **adição gráfica**. Isso significa que somamos as coordenadas y como na Figura 11. A Figura 12 mostra o resultado desse procedimento para fazer o gráfico da função $f + g$ do Exemplo 6.

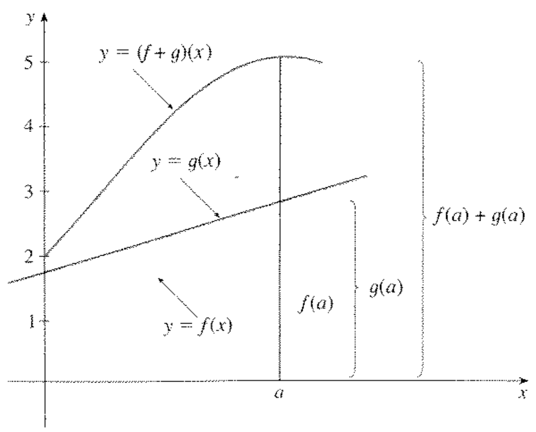


FIGURA 11

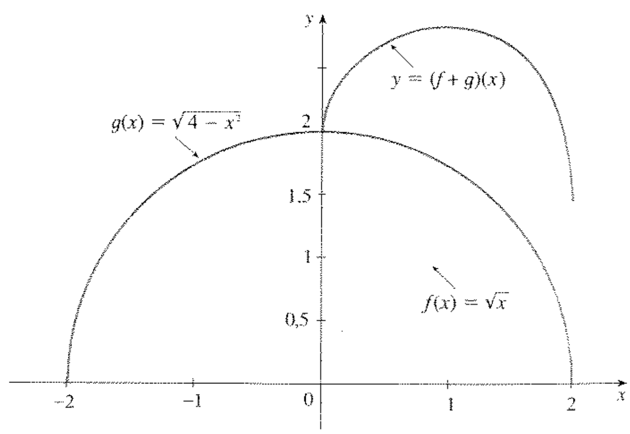


FIGURA 12

Composição de Funções

Há outra maneira de combinar duas funções para obter uma nova. Por exemplo, suponha que $y = f(u) = \sqrt{u}$ e $u = g(x) = x^2 + 1$. Uma vez que y é uma função de u que é uma função de x, segue que em última análise y é uma função de x. Calculamos isso por substituição:

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

O procedimento denomina-se *composição*, pois a nova função é *composta* de duas funções dadas f e g.

Em geral, dadas duas funções f e g, começamos com um número x no domínio de g e encontramos sua imagem $g(x)$. Se esse número $g(x)$ estiver no domínio de f, então podemos calcular o valor de $f(g(x))$. O resultado é uma nova função $h(x) = f(g(x))$ obtida pela substituição de g em f. Ela é denominada *composição* (ou *composta*) de f e g e é denotada por $f \circ g$ ("f bola g").

Definição Dadas duas funções f e g, a função **composta** $f \circ g$ (também chamada **composição** de f e g) é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

O domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os x no domínio de g tal que $g(x)$ está no domínio de f. Ou seja, $(f \circ g)(x)$ está definida sempre que $g(x)$ e $f(g(x))$ estiverem definidas. A melhor maneira de ver $f \circ g$ é por intermédio de um diagrama de máquina (Figura 13) ou de um diagrama de flechas (Figura 14).

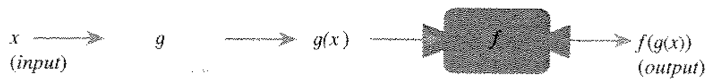


FIGURA 13
A máquina $f \circ g$ é composta de duas outras, a de g e a de f.

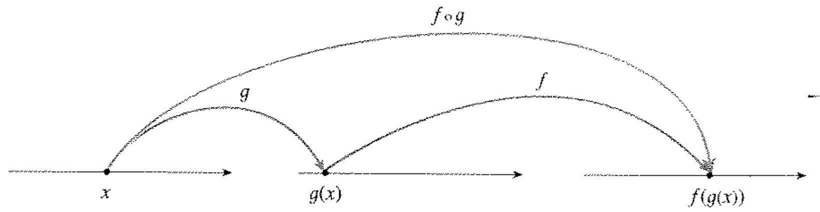


FIGURA 14
Diagrama de flechas para $f \circ g$

EXEMPLO 7 ▫ Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 3$, encontre a função composta $f \circ g$ e também $g \circ f$.

SOLUÇÃO Temos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

NOTA ▫ Você pode ver no Exemplo 7 que, em geral, $f \circ g \neq g \circ f$. Lembre-se de que a notação $f \circ g$ significa que a função g é aplicada primeiro e depois f. No Exemplo 7, $f \circ g$ é a função que *primeiro* subtrai 3 e *então* se eleva ao quadrado; $g \circ f$ é a função que *primeiro* se eleva ao quadrado e *então* subtrai 3.

EXEMPLO 8 ▫ Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encontre cada uma das funções e seu domínio.
(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $f \circ f$ (d) $g \circ g$

SOLUÇÃO

(a) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{2 - x}\right) = \sqrt{\sqrt{2 - x}} = \sqrt[4]{2 - x}$$

O domínio de $f \circ g$ é $\{x \mid 2 - x \geq 0\} = \{x \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$.

(b) $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$$

Se $0 \leq a \leq b$, então $a^2 \leq b^2$.

Para $\sqrt{x}$ estar definida, devemos ter $x \geq 0$. Para $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ ser estabelecida, devemos ter $2 - \sqrt{x} \geq 0$, isto é, $\sqrt{x} \leq 2$ ou $x \leq 4$. Assim, temos $0 \leq x \leq 4$, e o domínio de $g \circ f$ é o intervalo fechado $[0, 4]$.

(c) $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

O domínio de $f \circ f$ é $[0, \infty)$.

(d) $$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{2 - x}) = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$$

Essa expressão está definida quando $2 - x \geq 0$, isto é, $x \leq 2$ e $2 - \sqrt{2 - x} \geq 0$. Essa última desigualdade é equivalente a $\sqrt{2 - x} \leq 2$, ou $2 - x \leq 4$, isto é, $x \geq -2$. Assim, $-2 \leq x \leq 2$; logo, o domínio de $g \circ g$ é o intervalo fechado $[-2, 2]$. □

É possível fazer a composição de três ou mais funções. Por exemplo, a função composta $f \circ g \circ h$ pode ser encontrada calculando-se primeiro h, então g, e depois f como a seguir:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

EXEMPLO 9 □ Encontre $f \circ g \circ h$ se $f(x) = x/(x + 1)$, $g(x) = x^{10}$ e $h(x) = x + 3$.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 3)) \\ &= f((x + 3)^{10}) = \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1}\end{aligned}$$ □

Até aqui usamos a composição para construir as funções complicadas a partir das mais simples. Mas em cálculo é freqüentemente proveitoso ser capaz de decompor uma função complicada em funções mais simples, como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 10 □ Dada $F(x) = \cos^2(x + 9)$, encontre as funções f, g e h tais que $F = f \circ g \circ h$.

SOLUÇÃO Uma vez que $F(x) = [\cos(x + 9)]^2$, a fórmula para F estabelece que: primeiro adicionamos 9, e então tomamos o cosseno do resultado e, finalmente, o quadrado. Assim, fazemos

$$h(x) = x + 9 \qquad g(x) = \cos x \qquad f(x) = x^2$$

Então

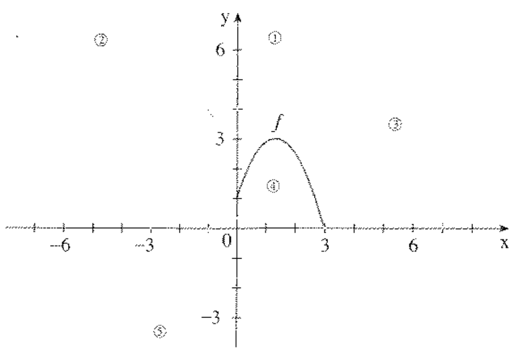
$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 9)) = f(\cos(x + 9)) \\ &= [\cos(x + 9)]^2 = F(x)\end{aligned}$$ □

1.3 Exercícios

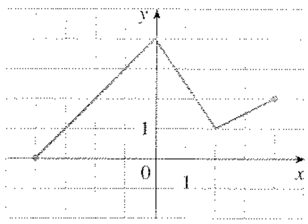
1. Suponha que seja dado o gráfico de f. Escreva as equações para os gráficos obtidos a partir do gráfico de f da seguinte forma.
   (a) Desloque 3 unidades para cima.
   (b) Desloque 3 unidades para baixo.
   (c) Desloque 3 unidades para a direita.
   (d) Desloque 3 unidades para a esquerda.
   (e) Faça uma reflexão em torno do eixo x.
   (f) Faça uma reflexão em torno do eixo y.
   (g) Estique verticalmente por um fator de 3.
   (h) Encolha verticalmente por um fator de 3.

2. Explique como obter, a partir do gráfico de $y = f(x)$, os gráficos a seguir:
   (a) $y = 5f(x)$
   (b) $y = f(x - 5)$
   (c) $y = -f(x)$
   (d) $y = -5f(x)$
   (e) $y = f(5x)$
   (f) $y = 5f(x) - 3$

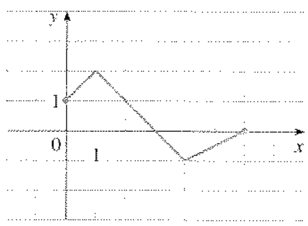
3. O gráfico $y = f(x)$ é dado. Associe cada equação com seu gráfico e dê razões para suas escolhas.
   (a) $y = f(x - 4)$
   (b) $y = f(x) + 3$
   (c) $y = \frac{1}{3}f(x)$
   (d) $y = -f(x + 4)$
   (e) $y = 2f(x + 6)$



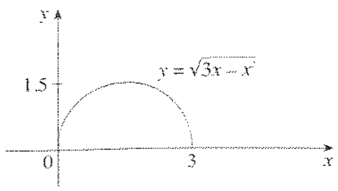
4. O gráfico de f é dado. Esboce os gráficos das seguintes funções.
   (a) $y = f(x + 4)$
   (b) $y = f(x) + 4$
   (c) $y = 2f(x)$
   (d) $y = -\frac{1}{2}f(x) + 3$

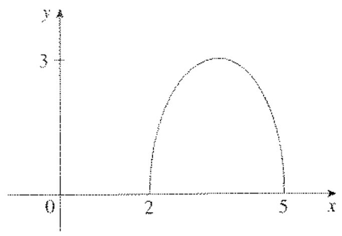


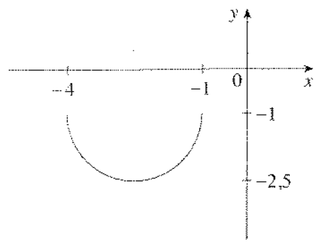
5. O gráfico de f é dado. Use-o para fazer o gráfico das seguintes funções.
   (a) $y = f(2x)$
   (b) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$
   (c) $y = f(-x)$
   (d) $y = -f(-x)$



6–7 □ O gráfico de $y = \sqrt{3x - x^2}$ é dado. Use as transformações para criar uma função cujo gráfico é mostrado.



6. 

7. 

8. (a) Como estão relacionados o gráfico de $y = 2 \operatorname{sen} x$ e o de $y = \operatorname{sen} x$? Use sua resposta e a Figura 6 para esboçar o gráfico de $y = 2 \operatorname{sen} x$.

(b) Como está relacionado ao gráfico de $y = 1 + \sqrt{x}$ o gráfico de $y = \sqrt{x}$? Utilize sua resposta e a Figura 4(a) para esboçar o gráfico de $y = 1 + \sqrt{x}$.

9–24 Faça o gráfico de cada função, sem desenhar os pontos, mas começando com o gráfico de uma das funções básicas dadas na Seção 1.2, e então aplicando as transformações apropriadas.

9. $y = -x^3$

10. $y = 1 - x^2$

11. $y = (x + 1)^2$

12. $y = x^2 - 4x + 3$

13. $y = 1 + 2 \cos x$

14. $y = 4 \operatorname{sen} 3x$

15. $y = \operatorname{sen} (x/2)$

16. $y = \dfrac{1}{x - 4}$

17. $y = \sqrt{x + 3}$

18. $y = (x + 2)^4 + 3$

19. $y = \dfrac{1}{2}(x^2 + 8x)$

20. $y = 1 + \sqrt[3]{x - 1}$

21. $y = \dfrac{2}{x + 1}$

22. $y = \dfrac{1}{4} \operatorname{tg} \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

23. $y = |\operatorname{sen} x|$

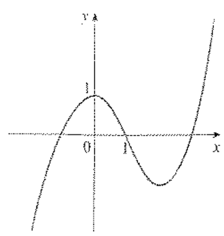
24. $y = |x^2 - 2x|$

25. A cidade de New Orleans está localizada a uma latitude de 30 °N. Use a Figura 9 para encontrar uma função que modele o número de horas do dia nessa cidade como uma função da época do ano. Use o fato de que nessa cidade em 31 de março o Sol surge às 5h51 da manhã e se põe às 6h18 da tarde para verificar a precisão de seu modelo.

26. Uma estrela variável é aquela cujo brilho alternadamente cresce e decresce. Para a estrela variável mais visível, Delta Cephei, o período de tempo entre os brilhos máximos é de 5,4 dias, o brilho médio (ou grandeza da estrela) é 4,0, e seu brilho varia de $\pm 0{,}35$ em grandeza. Encontre uma função que modele o brilho de Delta Cephei como uma função do tempo.

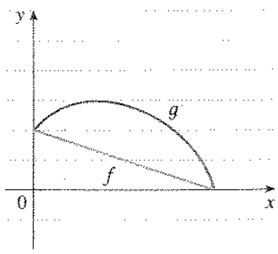
27. (a) Como o gráfico de $y = f(|x|)$ está relacionado com o gráfico de f?
(b) Esboce o gráfico de $y = \operatorname{sen} |x|$.
(c) Esboce o gráfico de $y = \sqrt{|x|}$.

28. Use o gráfico dado de f para esboçar o gráfico $y = 1/f(x)$. Quais aspectos de f são os mais importantes no esboço de $y = 1/f(x)$? Explique como eles são usados.

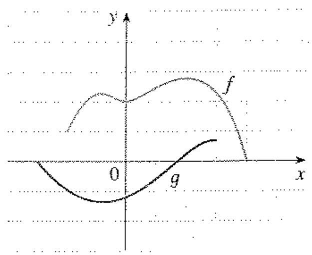


29–30 □ Use a adição gráfica para esboçar o gráfico de $f + g$.

29.



30.



31–32 □ Encontre $f + g$, $f - g$, fg e f/g, e estabeleça os domínios.

31. $f(x) = x^3 + 2x^2$, $g(x) = 3x^2 - 1$

32. $f(x) = \sqrt{1 + x}$, $g(x) = \sqrt{1 - x}$

33–34 □ Use os gráficos de f e g e o método da adição gráfica para esboçar os gráficos de $f + g$.

33. $f(x) = x$, $g(x) = 1/x$ **34.** $f(x) = x^3$, $g(x) = -x^2$

35–40 □ Encontre as funções $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ e $g \circ g$; e seus domínios.

35. $f(x) = 2x^2 - x$, $g(x) = 3x + 2$

36. $f(x) = 1 - x^3$, $g(x) = 1/x$

37. $f(x) = \text{sen } x$, $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

38. $f(x) = 1 - 3x$, $g(x) = 5x^2 + 3x + 2$

39. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$

40. $f(x) = \sqrt{2x+3}$, $g(x) = x^2 + 1$

41–44 □ Encontre $f \circ g \circ h$.

41. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$, $h(x) = x - 1$

42. $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 1 - x$

43. $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = x^2 + 2$, $h(x) = x + 3$

44. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \sqrt{x+3}$

45–50 □ Expresse na forma as funções $f \circ g$.

45. $F(x) = (x^2 + 1)^{10}$ **46.** $F(x) = \text{sen}(\sqrt{x})$

47. $G(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$ **48.** $G(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

49. $u(t) = \sqrt{\cos t}$ **50.** $u(t) = \dfrac{\text{tg } t}{1 + \text{tg } t}$

51–53 □ Expresse na forma as funções $f \circ g \circ h$.

51. $H(x) = 1 - 3^{x^2}$ **52.** $H(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x} - 1}$

53. $H(x) = \sec^4(\sqrt{x})$

54. Use a tabela para determinar o valor de cada expressão.

(a) $f(g(1))$ (b) $g(f(1))$ (c) $f(f(1))$

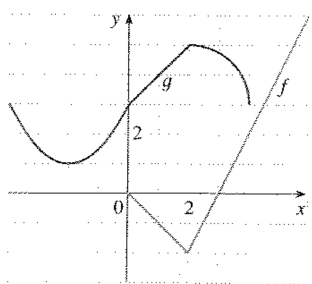
(d) $g(g(1))$ (e) $(g \circ f)(3)$ (f) $(f \circ g)(6)$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

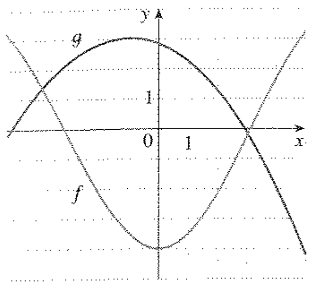
55. Use os gráficos dados de f e g para determinar o valor de cada uma das expressões ou explique por que elas não estão definidas.

(a) $f(g(2))$ (b) $g(f(0))$ (c) $(f \circ g)(0)$

(d) $(g \circ f)(6)$ (e) $(g \circ g)(-2)$ (f) $(f \circ f)(4)$



56. Use os gráficos dados de f e g para estimar o valor de $f(g(x))$ para $x = -5, -4, -3, \ldots, 5$. Use essas estimativas para esboçar o gráfico de $f \circ g$.



57. A queda de uma pedra em um lago cria ondas circulares que se espalham a uma velocidade de 60 cm/s.
(a) Expresse o raio desse círculo como uma função do tempo t (em segundos).
(b) Se A é a área do círculo como uma função do raio, encontre $A \circ r$ e interprete-a.

58. Um avião está voando a uma velocidade de 350 mi/h, a uma altitude de 1 milha, e passa diretamente sobre uma estação de radar no instante $t = 0$.
(a) Expresse a distância horizontal de vôo d (em milhas) como uma função de t.
(b) Expresse a distância s entre o avião e a estação de radar como uma função de d.
(c) Use a composição para expressar s como uma função de t.

59. A **função de Heaviside** H é definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Essa função é usada no estudo de circuitos elétricos para representar o surgimento repentino de corrente elétrica, ou voltagem, quando uma chave é instantaneamente ligada.
(a) Esboce o gráfico da função de Heaviside.
(b) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ no circuito se uma chave for ligada no instante $t = 0$ e 120 volts forem aplicados instantaneamente no circuito. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$.
(c) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ em um circuito quando é ligada uma chave em $t = 5$ segundos e 240 volts são aplicados instantaneamente no circuito. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$. (Note que começar em $t = 5$ corresponde a uma translação.)

60. A função de Heaviside definida no Exercício 59 pode também ser usada para definir uma **função rampa** $y = ctH(t)$, que representa um crescimento gradual na voltagem ou corrente no circuito.
(a) Esboce o gráfico da função rampa $y = tH(t)$.
(b) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ no circuito se uma chave for ligada no instante $t = 0$ e a voltagem crescer gradualmente até 120 volts em um intervalo de 60 segundos. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$ para $t \leq 60$.
(c) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ em um circuito se em $t = 7$ s for ligada uma chave e a voltagem crescer gradualmente até 100 volts em um período de 25 segundos. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$ para $t \leq 32$.

61. (a) Se $g(x) = 2x + 1$ e $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, encontre uma função f tal que $f \circ g = h$. (Pense sobre quais operações deveriam ser feitas em g para chegar em h.)
(b) Se $f(x) = 3x + 5$ e $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, encontre uma função g tal que $f \circ g = h$.

62. Se $f(x) = x + 4$ e $h(x) = 4x - 1$, encontre uma função g tal que $g \circ f = h$.

63. Suponha g uma função par e seja $h = f \circ g$. A função h é sempre uma função par?

64. Suponha g uma função ímpar e seja $h = f \circ g$. A função h é sempre uma função par? E se f for ímpar? E se f for par?

1.4 Calculadoras Gráficas e Computadores

Nesta seção vamos supor que você tenha acesso a uma calculadora ou a um computador com um *software* gráfico. Vamos ver como o uso desses dispositivos nos possibilita fazer o gráfico de funções complicadas e resolver problemas complexos, que de outra forma não poderiam ser resolvidos. Vamos apontar também alguns dos perigos ocultos nessas máquinas.

As calculadoras gráficas e os computadores podem fazer gráficos bem precisos de funções. Mas, como será visto no Capítulo 4, só por meio do cálculo podemos estar seguros de ter coberto todos os aspectos interessantes dos gráficos.

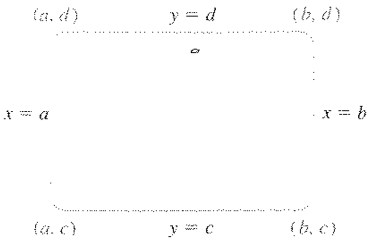


FIGURA 1
A janela retangular $[a, b]$ por $[c, d]$

Tanto calculadoras quanto computadores exibem uma parte retangular do gráfico de uma função em uma **janela de exposição** ou **tela de inspeção**, que será chamada aqui de **janela retangular**. A visão-padrão sempre nos fornece uma imagem incompleta ou enganadora, assim é importante escolher com cuidado a janela retangular. Se escolhermos a variação de x de $Xmín = a$ até $Xmáx = b$ e os valores de y de $Ymín = c$ até $Ymáx = d$, então a parte do gráfico que está no retângulo é

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

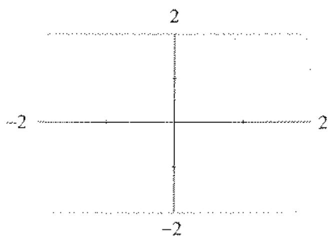
mostrada na Figura 1. Vamos nos referir a ela como *janela retangular* $[a, b]$ *por* $[c, d]$.

A máquina faz o gráfico da função f da mesma forma que você faria. Ela desenha pontos da forma $(x, f(x))$ para um certo número de valores igualmente espaçados de x entre a e b. Se determinado valor de x não estiver no domínio de f, ou se $f(x)$ estiver fora da janela retangular, ela vai para o próximo valor de x. A máquina conecta cada ponto com o precedente, formando assim uma representação do gráfico de f.

EXEMPLO 1 □ Em cada uma das janelas retangulares que se seguem faça o gráfico de $f(x) = x^2 + 3$.

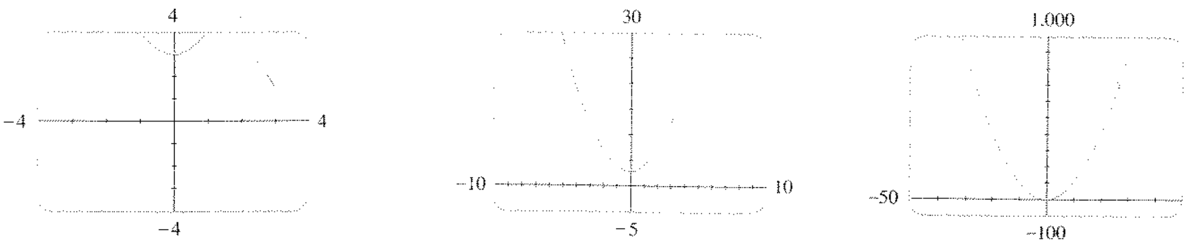
(a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ (b) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
(c) $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$ (d) $[-50, 50]$ por $[-100, 1.000]$

SOLUÇÃO Para a parte (a) escolhemos $Xmín = -2$, $Xmáx = 2$, $Ymín = -2$ e $Ymáx = 2$. O gráfico resultante está na Figura 2(a). A janela está em branco! Um instante de reflexão nos dá a explicação: observe que $x^2 \geqslant 0$ para todo x, logo $x^2 + 3 \geqslant 3$ para todo x. Assim a imagem da função $f(x) = x^2 + 3$ é $[3, \infty)$. Isso significa que o gráfico de f está inteiramente fora da janela retangular $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$.



(a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$

Os gráficos para as janelas retangulares das partes (b), (c) e (d) estão na Figura 2. Note que em (c) e (d) a visão está mais completa, porém em (d) não fica claro que o intercepto y é 3.



(b) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$ (c) $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$ (d) $[-50, 50]$ por $[-100, 1.000]$

FIGURA 2
Gráficos de $f(x) = x^2 + 3$

A partir do Exemplo 1 vemos que a escolha da janela retangular faz uma grande diferença no aspecto do gráfico. Algumas vezes, para obter uma visão mais completa ou mais global do gráfico, é necessário ampliar a janela. No exemplo a seguir veremos que um conhecimento prévio do domínio e da imagem da função dá pistas de como selecionar a janela retangular.

EXEMPLO 2 Determine uma janela apropriada para a função $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ e use-a para fazer o gráfico de f.

SOLUÇÃO A expressão para $f(x)$ está definida quando

$$8 - 2x^2 \geqslant 0 \iff 2x^2 \leqslant 8 \iff x^2 \leqslant 4$$
$$\iff |x| \leqslant 2 \iff -2 \leqslant x \leqslant 2$$

Portanto, o domínio de f é o intervalo $[-2, 2]$. Também,

$$0 \leqslant \sqrt{8 - 2x^2} \leqslant \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$$

logo a imagem de f é o intervalo $[0, 2\sqrt{2}]$.

Escolhemos a janela retangular de forma que o intervalo sobre o eixo x fosse um pouco maior que o domínio e o intervalo sobre o eixo y fosse um pouco maior que a imagem. Fazendo a janela retangular ser $[-3, 3]$ por $[-1, 4]$, obtemos o gráfico da Figura 3.

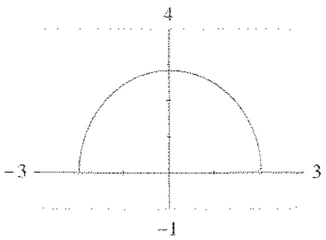


FIGURA 3

EXEMPLO 3 Faça o gráfico da função $y = x^3 - 150x$.

SOLUÇÃO Aqui o domínio é $\mathbb{R}$, o conjunto de todos os números reais. Isso não ajuda na escolha da janela. Vamos fazer algumas experiências. Se iniciarmos com a janela retangular $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$, obteremos o gráfico da Figura 4. Ele aparenta estar vazio, mas, na verdade, o gráfico está tão próximo de ser vertical que chega a se confundir com o eixo y.

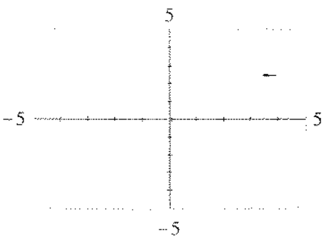


FIGURA 4

Usando o recurso *zoom* da calculadora gráfica para mudar a janela retangular para $[-20, 20]$ por $[-20, 20]$, obtemos a imagem da Figura 5(a). O gráfico aparenta ser formado por retas verticais, mas sabemos que isso não está correto. Observando cuidadosamente enquanto o gráfico está sendo feito, vemos que o processo se interrompe para depois reaparecer. Isso indica que é necessário olhar com mais detalhes na direção vertical, dessa forma, mudamos a janela retangular para $[-20, 20]$ por $[-500, 500]$. O gráfico resultante está na Figura 5(b). Todavia, ainda não temos revelados todos os aspectos principais da função; dessa forma, tentamos a janela $[-20, 20]$ por $[-1.000, 1.000]$ na Figura 5(c). Tudo indica que finalmente chegamos a uma janela apropriada. No Capítulo 4 veremos que realmente o gráfico da Figura 5(c) revela todos os principais aspectos da função.

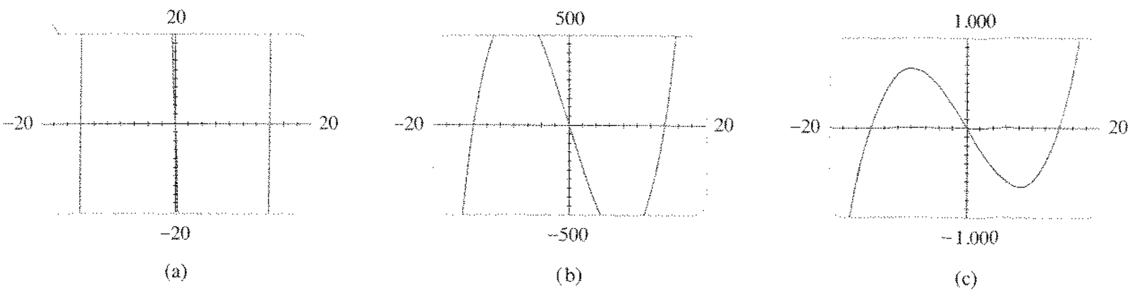


FIGURA 5
$f(x) = x^3 - 150x$

EXEMPLO 4 □ Faça o gráfico da função $f(x) = \text{sen } 50x$ em uma janela apropriada.

SOLUÇÃO A Figura 6(a) mostra o gráfico de f produzido por uma calculadora gráfica usando uma janela retangular de $[-12, 12]$ por $[-1{,}5, 1{,}5]$. À primeira vista o gráfico aparenta ser razoável. Porém, se mudarmos para as outras janelas da Figura 6, o gráfico mudará completamente. Algo estranho está acontecendo.

□ A aparência do gráfico na Figura 6 depende da máquina usada. Os gráficos que você obtiver em sua máquina podem não ser parecidos com os destas figuras, mas com certeza são igualmente imprecisos.

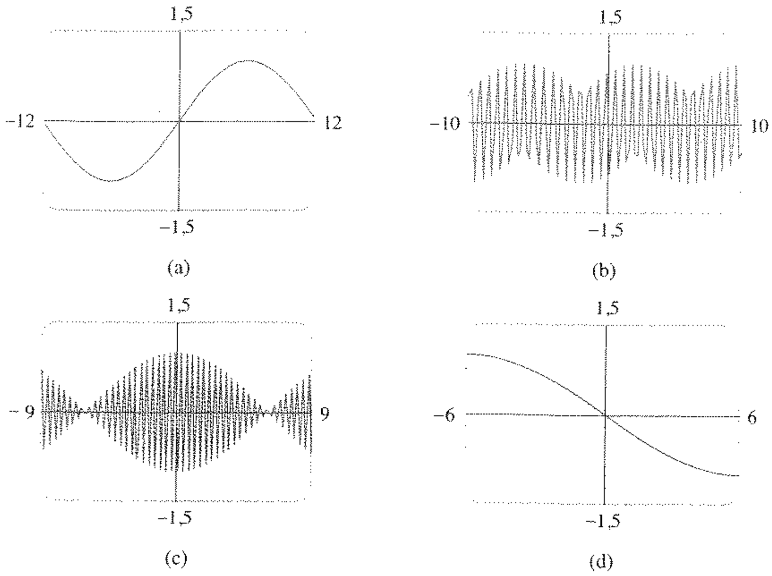


FIGURA 6
Gráficos de $f(x) = \text{sen } 50x$ em quatro janelas retangulares

A fim de explicar a grande diferença no aspecto desses gráficos e achar uma janela apropriada, é necessário encontrar o período da função $y = \text{sen } 50x$. Sabemos que o período da função $y = \text{sen } x$ é de 2π; assim, o período de $y = \text{sen } 50x$ é

$$\frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25} \approx 0{,}126$$

Isso sugere que devemos trabalhar com os valores pequenos de x para mostrar somente algumas oscilações do gráfico. Se escolhermos a janela $[-0{,}25, 0{,}25]$ por $[-1{,}5, 1{,}5]$, obteremos o gráfico da Figura 7.

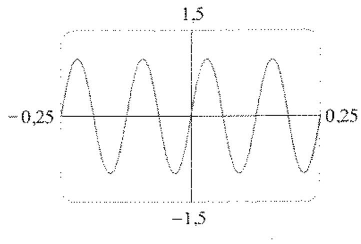


FIGURA 7
$f(x) = \text{sen } 50x$

Vemos agora o erro que cometemos na Figura 6. As oscilações de $y = \text{sen } 50x$ são tão rápidas que quando a calculadora desenha pontos e os une, perde o ponto máximo e o mínimo, dando assim uma impressão errada sobre o gráfico.

Vimos que a escolha de uma janela não apropriada pode levar a uma visão errônea do gráfico de uma função. Nos Exemplos 1 e 3 resolvemos o problema ampliando a janela, ao passo que no Exemplo 4 a reduzimos. No próximo exemplo examinaremos uma função para a qual não existe uma única janela satisfatória, que revele a verdadeira forma do gráfico.

EXEMPLO 5 □ Faça o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x + \frac{1}{100} \cos 100x$.

SOLUÇÃO A Figura 8 mostra o gráfico de f produzido por uma calculadora gráfica com uma janela retangular de $[-6{,}5, 6{,}5]$ por $[-1{,}5, 1{,}5]$. Ele se parece com o gráfico de $y = \text{sen } x$, talvez acrescido de algumas oscilações. Se dermos um *zoom* na janela $[-0{,}1, 0{,}1]$ por $[-0{,}1, 0{,}1]$ poderemos ver mais claramente a forma das oscilações acrescidas na Figura 9.

A razão para esse comportamento está no fato de que o segundo termo, $\frac{1}{100}\cos 100x$, é muito pequeno em comparação com o primeiro, sen x. Assim, realmente precisamos de dois gráficos para ver a natureza verdadeira dessa função.

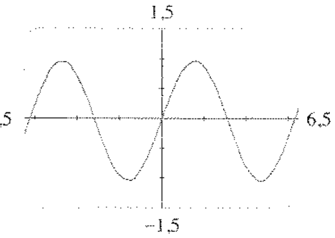


FIGURA 8

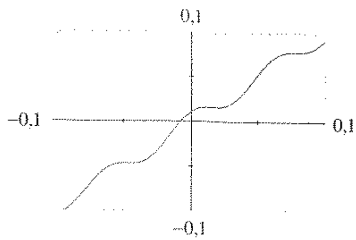
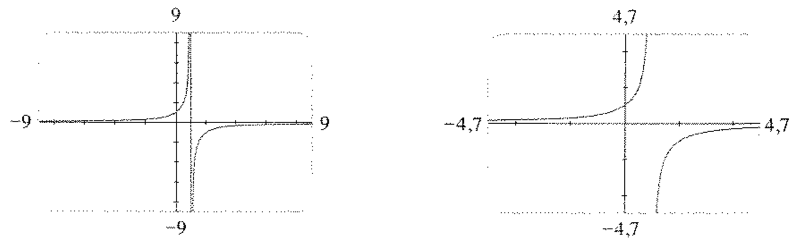


FIGURA 9

EXEMPLO 6 □ Faça o gráfico da função $y = \dfrac{1}{1-x}$.

SOLUÇÃO A Figura 10(a) mostra o gráfico produzido por uma calculadora com uma janela $[-9, 9]$ por $[-9, 9]$. Ao conectar os pontos sucessivos sobre o gráfico, a calculadora produz um segmento de reta íngreme do topo até a base da tela. Esse segmento de reta realmente não faz parte do gráfico. Observe que o domínio da função $y = 1/(1-x)$ é $\{x \mid x \neq 1\}$. Podemos eliminar a reta quase vertical fazendo experiências com uma mudança de escala. Quando mudamos para uma janela menor $[-4{,}7; 4{,}7]$ por $[-4{,}7; 4{,}7]$, obtemos um gráfico muito melhor, como mostrado na Figura 10(b).

□ Para evitar a reta estranha podemos mudar a maneira de fazer o gráfico na calculadora de tal forma que os pontos não sejam conectados.



(a) (b)

FIGURA 10
$y = \dfrac{1}{1-x}$

EXEMPLO 7 □ Faça o gráfico da função $y = \sqrt[3]{x}$.

SOLUÇÃO Alguns recursos gráficos dispõem a imagem como na Figura 11, enquanto outros produzem uma imagem como a da Figura 12. Sabemos da Seção 1.2 (Figura 13) que o gráfico na Figura 12 está correto; assim, o que aconteceu na Figura 11? A explicação disso é que, em algumas máquinas, $x^{1/3}$ é computado como $e^{(1/3)\ln x}$ e $\ln x$ não está definida para $x < 0$. Logo, somente a metade à direita do gráfico é produzida.

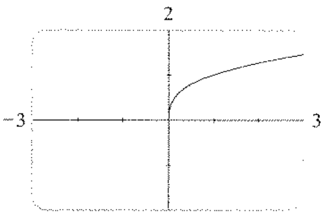


FIGURA 11

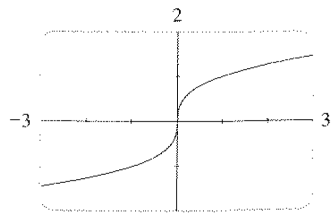


FIGURA 12

Você deve experimentar com sua máquina para ver qual desses dois gráficos será produzido. Se obtiver o gráfico da Figura 11, poderá obter a imagem correta fazendo o gráfico da função

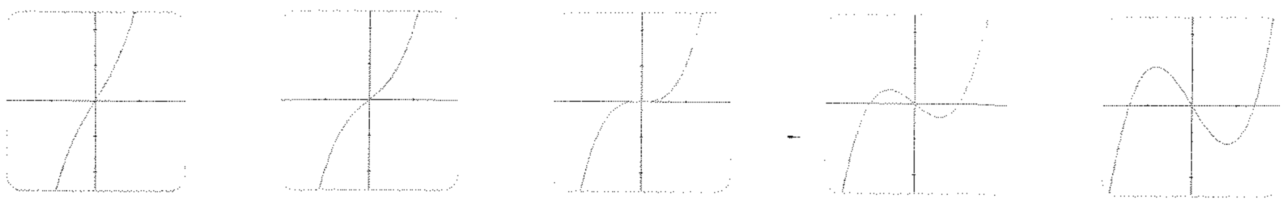
$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}$$

Observe que essa função é igual a $\sqrt[3]{x}$ (exceto quando $x = 0$).

Para entender como a expressão para uma função relaciona-se com seu gráfico, é proveitoso fazer o gráfico de uma **família de funções**, isto é, uma coleção de funções cujas equações estão relacionadas. No exemplo a seguir faremos os gráficos de membros de uma família de polinômios cúbicos.

EXEMPLO 8 □ Faça o gráfico da função $y = x^3 + cx$ para vários valores de c. Como mudará o gráfico quando fizermos c variar?

SOLUÇÃO A Figura 13 mostra os gráficos da função $y = x^3 + cx$ para $c = 2, 1, 0, -1$ e -2. Vemos que, para os valores positivos de c, o gráfico é crescente da esquerda para a direita sem ponto de máximo ou de mínimo (picos ou vales). Quando $c = 0$, a curva é achatada na origem. Quando c é negativo, a curva tem um ponto de máximo e um ponto de mínimo. À medida que c decresce, o ponto de máximo fica cada vez mais alto, e o ponto de mínimo, cada vez mais baixo.



(a) $y = x^3 + 2x$ (b) $y = x^3 + x$ (c) $y = x^3$ (d) $y = x^3 - x$ (e) $y = x^3 - 2x$

FIGURA 13
Vários membros da família de funções $y = x^3 + cx$ têm seus gráficos na janela $[-2, 2]$ por $[-2{,}5, 2{,}5]$

EXEMPLO 9 □ Encontre as soluções da equação $\cos x = x$ com duas casas decimais de precisão.

SOLUÇÃO As soluções da equação $\cos x = x$ são as coordenadas x dos pontos de interseção das curvas $y = \cos x$ e $y = x$. Da Figura 14(a) vemos que há uma única solução e ela está entre 0 e 1. Dando um *zoom* na janela $[0, 1]$ por $[0, 1]$, vemos, da Figura 14(b), que a solução está entre 0,7 e 0,8. Damos mais um *zoom* para a janela $[0{,}7, 0{,}8]$ por $[0{,}7, 0{,}8]$ na Figura 14(c). Movendo o cursor para o ponto de interseção das duas curvas, ou por inspeção e pelo fato de que a escala em x é 0,01, vemos que a solução da equação é cerca de 0,74. (Muitas calculadoras possuem dispositivos que fornecem pontos de interseção.)

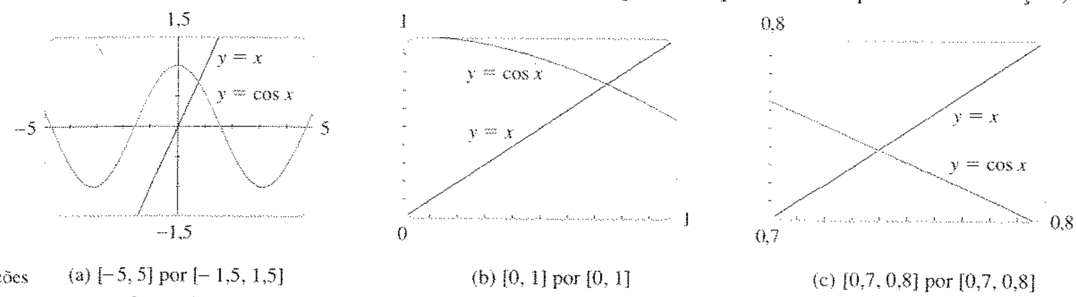


FIGURA 14
Localização das soluções de $\cos x = x$

(a) $[-5, 5]$ por $[-1{,}5, 1{,}5]$ escala $x = 1$

(b) $[0, 1]$ por $[0, 1]$ escala $x = 0{,}1$

(c) $[0{,}7, 0{,}8]$ por $[0{,}7, 0{,}8]$ escala $x = 0{,}01$

1.4 Exercícios

1. Use uma calculadora gráfica ou um computador para determinar qual das janelas retangulares dadas produz o gráfico mais apropriado da função $f(x) = x^4 + 2$.
   (a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
   (b) $[0, 4]$ por $[0, 4]$
   (c) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
   (d) $[-8, 8]$ por $[-4, 40]$
   (e) $[-40, 40]$ por $[-80, 800]$

2. Use uma calculadora gráfica ou um computador para determinar qual das janelas retangulares dadas produz o gráfico mais apropriado da função $f(x) = x^2 + 7x + 6$.
   (a) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$
   (b) $[0, 10]$ por $[-20, 100]$
   (c) $[-15, 8]$ por $[-20, 100]$
   (d) $[-10, 3]$ por $[-100, 20]$

3. Use uma calculadora gráfica ou um computador para determinar qual das janelas retangulares dadas produz o gráfico mais apropriado da função $f(x) = 10 + 25x - x^3$.
   (a) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
   (b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
   (c) $[-20, 20]$ por $[-100, 100]$
   (d) $[-100, 100]$ por $[-200, 200]$

4. Use uma calculadora gráfica ou um computador para determinar qual das janelas retangulares dadas produz o gráfico mais apropriado da função $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$.
   (a) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
   (b) $[-5, 5]$ por $[0, 100]$
   (c) $[-10, 10]$ por $[-10, 40]$
   (d) $[-2, 10]$ por $[-2, 6]$

5–18 Determine uma janela retangular apropriada para a função dada e use-a para fazer o gráfico da função.

5. $f(x) = 5 + 20x - x^2$
6. $f(x) = x^3 + 30x^2 + 200x$
7. $f(x) = 0{,}01x^3 - x^2 + 5$
8. $f(x) = x(x + 6)(x - 9)$
9. $f(x) = \sqrt[4]{81 - x^4}$
10. $f(x) = \sqrt{0{,}1x + 20}$
11. $f(x) = x^2 + \dfrac{100}{x}$
12. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 100}$
13. $f(x) = \cos 100x$
14. $f(x) = 3 \operatorname{sen} 120x$
15. $f(x) = \operatorname{sen}(x/40)$
16. $y = \operatorname{tg} 25x$
17. $y = 3^{\cos(x^2)}$
18. $y = x^2 + 0{,}02 \operatorname{sen} 50x$

19. Faça o gráfico da elipse $4x^2 + 2y^2 = 1$ por meio dos gráficos das funções que são a metade superior e inferior da elipse.

20. Faça o gráfico da hipérbole $y^2 - 9x^2 = 1$ por meio dos gráficos das funções que são a metade superior e inferior dos ramos da hipérbole.

21–23 Encontre todas as soluções da equação com duas casas decimais de precisão.

21. $x^3 - 9x^2 - 4 = 0$

22. $x^3 = 4x - 1$

23. $x^2 = \operatorname{sen} x$

24. Vimos no Exemplo 9 que a equação $\cos x = x$ tem exatamente uma solução.
   (a) Use um gráfico para mostrar que a equação $\cos x = 0{,}3x$ tem três soluções e encontre-as com duas casas decimais de precisão.
   (b) Encontre um valor aproximado m tal que a equação $\cos x = mx$ tenha exatamente duas soluções.

25. Use os gráficos para determinar qual das funções $f(x) = 10x^2$ e $g(x) = x^3/10$ é, em última análise, maior (isto é, maior quando x for muito grande).

26. Use os gráficos para determinar qual dentre as funções $f(x) = x^4 - 100x^3$ e $g(x) = x^3$ é, em última análise, maior.

27. Para quais valores de x é válido que $|\operatorname{sen} x - x| < 0{,}1$?

28. Faça o gráfico dos polinômios $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$ e $Q(x) = 3x^5$ na mesma tela, usando primeiro a janela retangular $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ e então mudando para $[-10, 10]$ por $[-10.000, 10.000]$. O que você pode observar a partir desses gráficos?

29. Neste exercício consideramos a família de funções $f(x) = \sqrt[n]{x}$ onde n é um inteiro positivo.
   (a) Faça o gráfico da função raiz $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ e $y = \sqrt[6]{x}$ na mesma tela usando a janela retangular $[-1, 4]$ por $[-1, 3]$.
   (b) Faça o gráfico das funções $y = x$, $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = \sqrt[5]{x}$ na mesma tela usando a janela retangular $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$. (Veja o Exemplo 7.)
   (c) Faça o gráfico das funções $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ e $y = \sqrt[5]{x}$ na mesma tela usando a janela retangular $[-1, 3]$ por $[-1, 2]$.
   (d) Que conclusões você pode tirar desses gráficos?

30. Neste exercício consideramos a família de funções $f(x) = 1/x^n$, onde n é um inteiro positivo.

(a) Faça o gráfico das funções $y = 1/x$ e $y = 1/x^3$ na mesma tela usando a janela retangular $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$.

(b) Faça o gráfico das funções $y = 1/x^2$ e $y = 1/x^4$ na mesma tela usando a janela retangular dada na parte (a).

(c) Faça o gráfico de todas as funções das partes (a) e (b) na mesma tela usando a janela retangular $[-1, 3]$ por $[-1, 3]$.

(d) Que conclusões você pode tirar desses gráficos?

31. Faça o gráfico da função $f(x) = x^4 + cx^2 + x$ para vários valores de c. Como mudará o gráfico quando c variar?

32. Faça o gráfico da função $f(x) = \sqrt{1 + cx^2}$ para vários valores de c. Descreva como a variação de c afeta o gráfico.

33. Faça o gráfico da função $y = x^n 2^{-x}$, $x \geq 0$, para $n f(x) = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6. Como varia o gráfico com o crescimento de n?

34. As curvas com equações

$$y = \frac{|x|}{\sqrt{c - x^2}}$$

são chamadas **curvas ponta de bala**. Faça o gráfico de algumas dessas curvas para entender o porquê de seu nome. O que acontece quando c cresce?

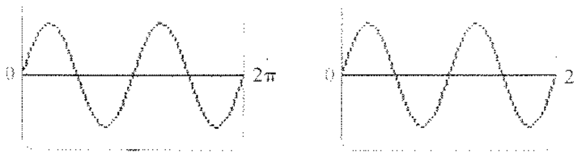
35. O que acontece com o gráfico da equação $y^2 = cx^3 + x^2$ com a variação de c?

36. Este exercício explora o efeito da função interior g sobre a função composta $y = f(g(x))$.

(a) Faça o gráfico da função $y = \text{sen}(\sqrt{x})$ usando a janela $[0, 400]$ por $[-1{,}5, 1{,}5]$. Qual a diferença entre esse gráfico e o da função seno?

(b) Faça o gráfico da função $y = \text{sen}(x^2)$ usando a janela $[-5, 5]$ por $[-1{,}5, 1{,}5]$. Qual a diferença com esse gráfico e o da função seno?

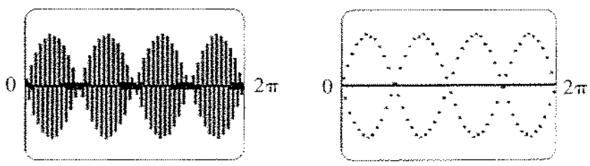
37. As figuras a seguir mostram os gráficos de $y = \text{sen}\, 96x$ e de $y = \text{sen}\, 2x$, conforme são exibidas por uma calculadora gráfica TI-83.



$y = \text{sen}\, 96x$ $\quad$ $y = \text{sen}\, 2x$

O primeiro gráfico é inexato. Explique por que os dois gráficos aparentam ser idênticos. [*Dica*: A janela gráfica da TI-83 é de 95 pixels. Quais pontos específicos a calculadora desenha?]

38. O primeiro gráfico da figura a seguir é aquele que uma calculadora gráfica TI-83 exibe como função $y = \text{sen}\, 45x$. Ele é incorreto e, portanto, para ajudar a explicar sua aparência, desenhamos a curva em questão no modo pontual da calculadora obtendo o segundo gráfico.



Que duas curvas senoidais a calculadora aparenta estar desenhando? Mostre que cada ponto do gráfico de $y = \text{sen}\, 45x$ que a TI-83 escolhe para desenhar está, de fato, em uma dessas duas curvas. (A janela gráfica da TI-83 é de 95 pixels.)

1.5 Funções Exponenciais

A função $f(x) = 2^x$ é chamada *função exponencial*, pois a variável, x, é o expoente. Ela não deve ser confundida com a função potência $g(x) = x^2$, na qual a variável é a base.

Em geral, uma **função exponencial** é uma função da forma

$$f(x) = a^x$$

onde a é uma constante positiva. Vamos recordar o que isso significa.

Se $x = n$, um inteiro positivo, então

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Se $x = 0$, então $a^0 = 1$, e se $x = -n$, onde n é um inteiro positivo, então

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Se x for um número racional, $x = p/q$, onde p e q são inteiros e $q > 0$, então

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Mas, qual o significado de a^x se x for um número irracional? Por exemplo, qual o significado de $2^{\sqrt{3}}$ ou 5^{π}?

Para ajudá-lo a responder a essa questão olhamos primeiro o gráfico da função $y = 2^x$, no qual x é racional. Uma representação desse gráfico encontra-se na Figura 1. Queremos alargar o domínio de $y = 2^x$ para incluir os números racionais e irracionais.

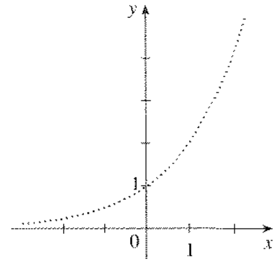


FIGURA 1
Representação de $y = 2^x$, x racional

No gráfico da Figura 1 existem buracos correspondentes aos valores irracionais de x. Queremos preencher os buracos definindo $f(x) = 2^x$, onde $x \in \mathbb{R}$, de modo que f seja uma função crescente. Em particular, uma vez que o número irracional $\sqrt{3}$ satisfaz

$$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$$

devemos ter

$$2^{1{,}7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}8}$$

e sabemos que $2^{1{,}7}$ e $2^{1{,}8}$ têm um significado, pois 1,7 e 1,8 são números racionais. Da mesma forma, usando as melhores aproximações para $\sqrt{3}$, obtemos melhores aproximações para $2^{\sqrt{3}}$:

▫ Uma prova dessa afirmação é dada em J. Marsden e A. Weinstein, *Calculus Unlimited* (Menlo Park, CA: Benjamin/Cummings, 1980).

$$\begin{array}{rcl}
1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74 & \Rightarrow & 2^{1{,}73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}74} \\
1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733 & \Rightarrow & 2^{1{,}732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}733} \\
1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321 & \Rightarrow & 2^{1{,}7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}7321} \\
1{,}73205 < \sqrt{3} < 1{,}73206 & \Rightarrow & 2^{1{,}73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}73206} \\
\vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \quad\quad \vdots
\end{array}$$

Pode ser mostrado que há exatamente um número maior que todos os números

$$2^{1{,}7}, \quad 2^{1{,}73}, \quad 2^{1{,}732}, \quad 2^{1{,}7320}, \quad 2^{1{,}73205}, \quad \ldots$$

e menor que todos os números

$$2^{1{,}8}, \quad 2^{1{,}74}, \quad 2^{1{,}733}, \quad 2^{1{,}7321}, \quad 2^{1{,}73206}, \quad \ldots$$

Definimos $2^{\sqrt{3}}$ como sendo esse número. Usando o processo de aproximação precedente podemos computá-lo corretamente com seis casas decimais:

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}321997$$

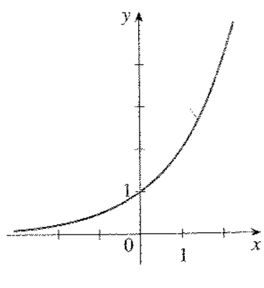


FIGURA 2
$y = 2^x$, x real

Da mesma forma, podemos definir 2^x (ou a^x, se $a > 0$) onde x é um número irracional qualquer. A Figura 2 mostra como os buracos da Figura 1 foram preenchidos para completar o gráfico da função $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Os gráficos dos membros da família de funções $y = a^x$ estão na Figura 3 para vários valores da base a. Note que todos esses gráficos passam pelo mesmo ponto $(0, 1)$, pois $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. Observe que a função exponencial cresce mais rapidamente à medida que a fica cada vez maior (para $x > 0$).

Se $0 < a < 1$, então a^x aproxima-se de 0 à medida que x cresce. Se $a > 1$, então a^x tende a 0 conforme x decresce por valores negativos. Em ambos os casos o eixo x é uma assíntota horizontal. Esses assuntos serão discutidos na Seção 2.6.

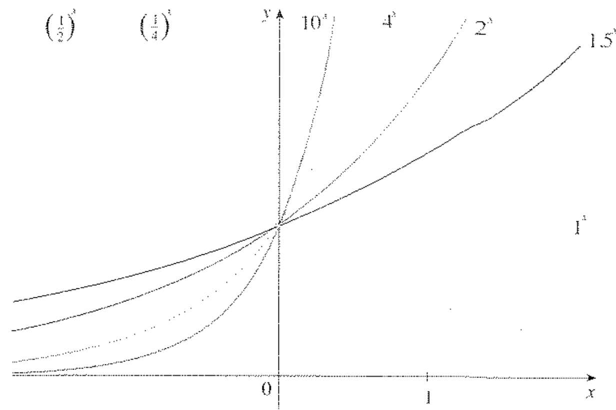
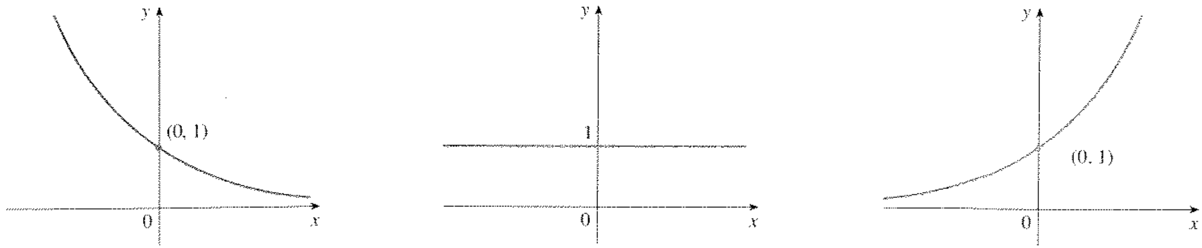


FIGURA 3

Você pode ver na Figura 3 que basicamente existem três tipos de função exponencial $y = a^x$. Se $0 < a < 1$, a função exponencial decresce; se $a = 1$, ela é uma constante; e se $a > 1$, ela cresce. Esses três casos estão na Figura 4. Observe que se $a \neq 1$, então a função exponencial $y = a^x$ tem o domínio $\mathbb{R}$ e a imagem $(0, \infty)$. Além disso, uma vez que $(1/a)^x = 1/a^x = a^{-x}$, o gráfico de $y = (1/a)^x$ é a reflexão do gráfico de $y = a^x$ em torno do eixo y.



(a) $y = a^x$, $0 < a < 1$ (b) $y = 1^x$ (c) $y = a^x$, $a > 1$

FIGURA 4

Uma razão para a importância da função exponencial está nas propriedades a seguir. Se x e y forem números racionais, então essas propriedades são bem conhecidas da álgebra elementar. Pode-se provar que elas permanecem verdadeiras para números reais arbitrários x e y.

Na Seção 5.6 apresentaremos uma definição para a função exponencial que vai nos capacitar a dar demonstrações simples para as Leis dos Expoentes.

Lei dos Expoentes Se a e b forem números positivos e x e y, números reais quaisquer, então

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

3. $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

EXEMPLO 1 Esboce o gráfico da função $y = 3 - 2^x$ e determine seu domínio e imagem.

Para uma revisão sobre as reflexões e deslocamentos de gráficos, veja a Seção 1.3.

SOLUÇÃO Primeiro refletimos o gráfico de $y = 2^x$ (mostrado na Figura 2) em torno do eixo x para obter o gráfico de $y = -2^x$ na Figura 5(b). A seguir deslocamos o gráfico de $y = -2^x$ 3 unidades para cima, para obter o gráfico de $y = 3 - 2^x$ na Figura 5(c). O domínio é $\mathbb{R}$ e a imagem, $(-\infty, 3)$.

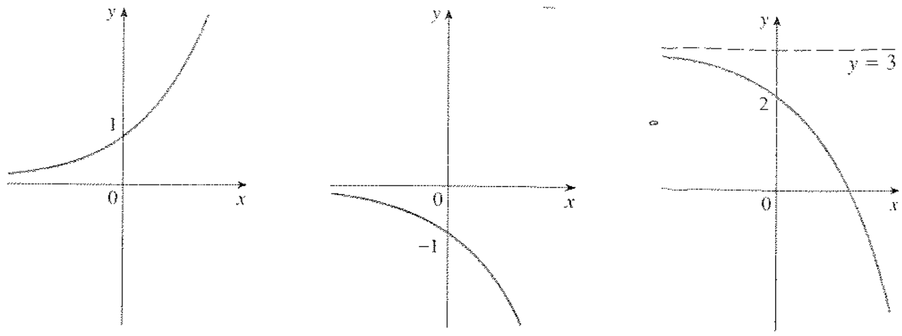


FIGURA 5 (a) $y = 2^x$ (b) $y = -2^x$ (c) $y = 3 - 2^x$

EXEMPLO 2 Use um recurso gráfico para comparar a função exponencial $f(x) = 2^x$ e a função potência $g(x) = x^2$. Qual função crescerá mais rapidamente quando x for grande?

O Exemplo 2 mostra que $y = 2^x$ aumenta mais rapidamente que $y = x^2$. Para verificar quão rapidamente $f(x) = 2^x$ cresce, vamos fazer o seguinte experimento mental. Começaremos com um pedaço de papel com uma espessura de 1 milésimo de polegada e vamos dobrá-lo pela metade 50 vezes. Cada vez que dobramos o papel pela metade, a sua espessura se duplica; assim, a sua espessura resultante seria de $2^{50}/1.000$ polegadas. Que espessura você acha que isso representa? De fato, isso é mais que 17 milhões de milhas!

SOLUÇÃO A Figura 6 mostra os gráficos das duas funções na janela retangular $[-2, 6]$ por $[0, 40]$. Vemos que os gráficos se interceptam três vezes, mas, para $x > 4$, o gráfico de $f(x) = 2^x$ fica acima do gráfico de $g(x) = x^2$. A Figura 7 dá uma visão mais abrangente e mostra que, para grandes valores de x, a função exponencial $y = 2^x$ cresce muito mais rapidamente que a função potência $y = x^2$.

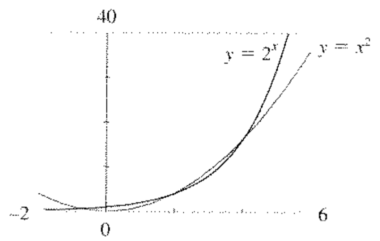


FIGURA 6

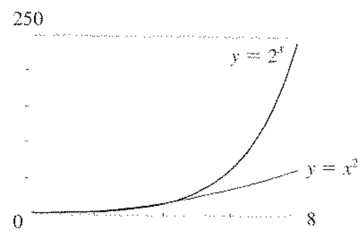


FIGURA 7

Aplicações das Funções Exponenciais

A função exponencial ocorre freqüentemente em modelos matemáticos da natureza e da sociedade. Vamos indicar brevemente aqui como eles surgem na descrição do crescimento populacional e decaimento radioativo. Em capítulos posteriores daremos essas e outras aplicações com mais detalhes.

Vamos considerar primeiro uma população de bactérias em um meio nutriente homogêneo. Suponhamos que fazendo amostras da população em certos intervalos fique determinado que a população dobra a cada hora. Se o número de bactérias no instante t for $p(t)$, onde t é medido em horas, e a população inicial for $p(0) = 1.000$, então

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1.000$$
$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1.000$$
$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1.000$$

Desse padrão parece que, em geral,

$$p(t) = 2^t \times 1.000 = (1.000)2^t$$

A função população é um múltiplo constante da função exponencial $y = 2^t$; logo, ela exibe o rápido crescimento que observamos nas Figuras 2 e 7. Sob condições ideais (espaço e alimentos ilimitados e ausência de doenças) esse crescimento exponencial é típico do que ocorre realmente na natureza.

O que pode ser dito sobre a população? A Tabela 1 mostra os dados da população mundial do século XX, e a Figura 8 mostra o correspondente mapa de dispersão.

TABELA 1

Ano	População (milhões)
1900	1.650
1910	1.750
1920	1.860
1930	2.070
1940	2.300
1950	2.560
1960	3.040
1970	3.710
1980	4.450
1990	5.280
2000	6.080

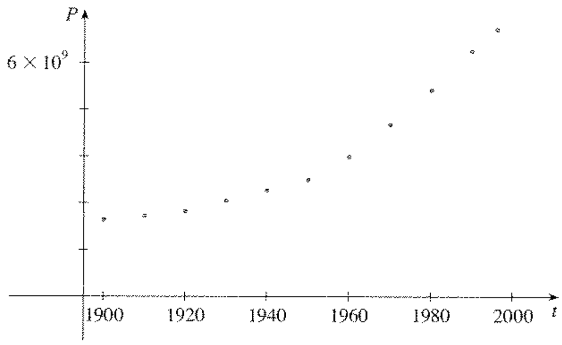


FIGURA 8 Mapa de dispersão para o crescimento populacional mundial

O padrão dos dados da Figura 8 sugere um crescimento exponencial; assim, se usarmos uma calculadora gráfica com capacidade para uma regressão exponencial por mínimos quadrados, obteremos o seguinte modelo exponencial:

$$P = (0{,}008079266) \cdot (1{,}013731)^t$$

A Figura 9 mostra o gráfico dessa função exponencial junto com os pontos originais. Podemos ver que a curva exponencial se ajusta razoavelmente aos dados. Os períodos de lento crescimento populacional podem ser explicados pelas duas guerras mundiais e pela depressão dos anos 30.

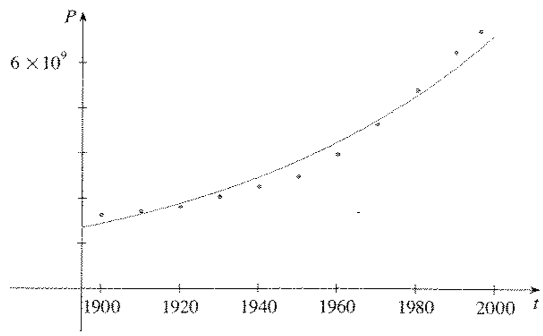


FIGURA 9

Modelo exponencial para o crescimento populacional

EXEMPLO 3 A *vida média* do estrôncio-90, ^{90}Sr, é de 25 anos. Isso significa que a metade de qualquer quantidade do ^{90}Sr vai se desintegrar em 25 anos.
(a) Se uma amostra de ^{90}Sr tiver uma massa de 24 mg, encontre uma expressão para a massa $m(t)$ que sobrará após t anos.
(b) Encontre a massa remanescente após 40 anos, correta até o miligrama mais próximo.
(c) Use um recurso gráfico para fazer o gráfico de $m(t)$ e use esse gráfico para estimar o tempo necessário para que a massa fique reduzida a 5 mg.

SOLUÇÃO
(a) A massa inicial de 24 mg é dividida ao meio a cada período de 25 anos, assim

$$m(0) = 24$$

anos mg

$$m(25) = \frac{1}{2}(24)$$

metade em 25 anos

$$m(50) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(24) = \frac{1}{2^2}(24)$$

$$m(75) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2}(24) = \frac{1}{2^3}(24)$$

$$m(100) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3}(24) = \frac{1}{2^4}(24)$$

Desse padrão estipulamos que a massa remanescente após t anos é

$$m(t) = \frac{1}{2^{t/25}}(24) = 24 \cdot 2^{-t/25}$$

t anos/25 = quantas vezes o 25 se repete

Trata-se de uma função exponencial com a base $a = 2^{-1/25} = 1/2^{1/25}$.
(b) A massa remanescente após 40 anos é

$$m(40) = 24 \cdot 2^{-40/25} \approx 7{,}9 \text{ mg}$$

(c) Usamos uma calculadora gráfica ou um computador para fazer o gráfico da função $m(t) = 24 \cdot 2^{-t/25}$ que está na Figura 10. Nele está também a reta $m = 5$, e usando o cursor podemos estimar que $m(t) = 5$ quando $t \approx 57$. Dessa forma, a massa da amostra ficará reduzida a 5 mg após cerca de 57 anos.

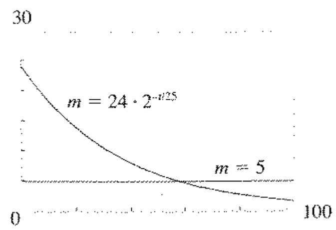


FIGURA 10

O Número e

Dentre todas as bases possíveis para uma função exponencial, há uma que é mais conveniente para os propósitos do cálculo. Na escolha de uma base a pesa muito a forma como a função $y = a^x$ cruza o eixo y. As Figuras 11 e 12 mostram as retas tangentes ao gráfico de $y = 2^x$ e

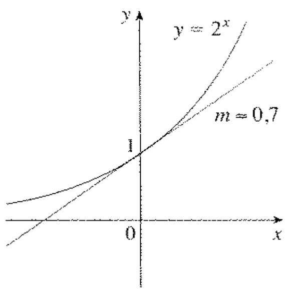


FIGURA 11

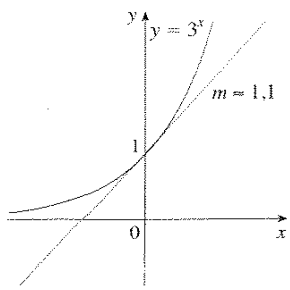


FIGURA 12

$y = 3^x$ no ponto $(0, 1)$. (As retas tangentes serão definidas precisamente na Seção 2.7: por ora vamos pensar a reta tangente ao gráfico da exponencial em um ponto como a reta que toca o gráfico em um único ponto.) Se medirmos as inclinações das retas tangentes em $(0, 1)$, encontraremos $m \approx 0{,}7$ para $y = 2^x$ e $m \approx 1{,}1$ para $y = 3^x$.

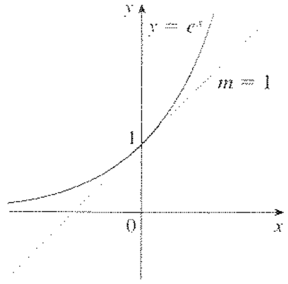


FIGURA 13

A função exponencial natural cruza o eixo y com uma inclinação 1

Conforme será visto no Capítulo 3, as fórmulas do cálculo ficam muito simplificadas quando escolhemos para a base a aquela para a qual resulta uma reta tangente $y = a^x$ em $(0, 1)$ com uma inclinação de *exatamente* 1 (veja a Figura 13). Esse número *existe* (como veremos na Seção 5.6) realmente e é denotado pela letra e. (Essa notação foi escolhida pelo matemático suíço Leonhard Euler em 1727, provavelmente por ser a primeira letra da palavra *exponencial*.) Vendo as Figuras 11 e 12, não nos surpreende que o número e esteja entre 2 e 3 e o gráfico de $y = e^x$, entre $y = 2^x$ e $y = 3^x$ (veja a Figura 14). No Capítulo 3 veremos que o valor de e, correto até a quinta casa decimal, é

$$e \approx 2{,}71828$$

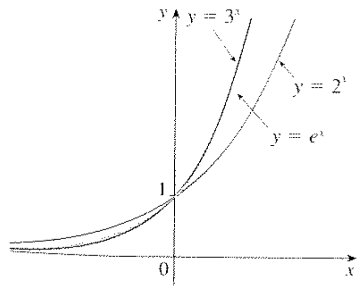
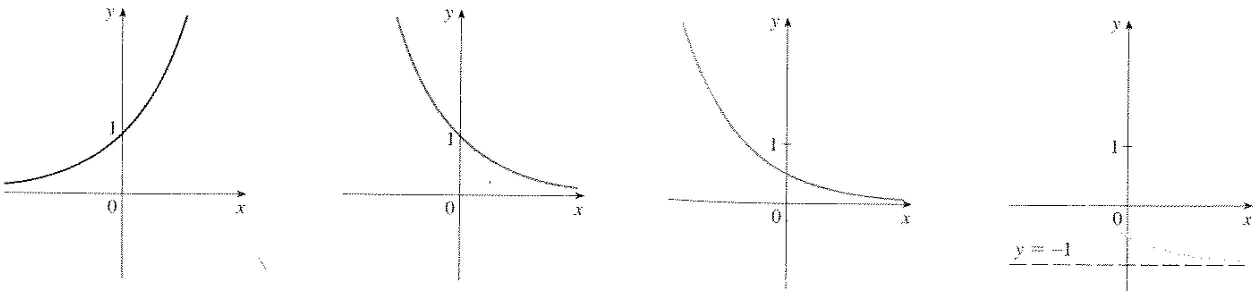


FIGURA 14

EXEMPLO 4 □ Faça o gráfico de $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ e estabeleça qual o domínio e a imagem.

SOLUÇÃO Começamos com o gráfico de $y = e^x$ das Figuras 13 e 15(a) e o refletimos em torno do eixo y para obter o gráfico de $y = e^{-x}$ ilustrado na Figura 15(b). (Note que essa curva cruza o eixo y com uma inclinação de -1.) Então comprimimos verticalmente o gráfico por um fator de 2 para obter o gráfico de $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ mostrado na Figura 15(c). Finalmente deslocamos o gráfico para baixo uma unidade, para obter o que foi pedido na Figura 15(d). O domínio é $\mathbb{R}$ e a imagem é $(-1, \infty)$.



(a) $y = e^x$ (b) $y = e^{-x}$ (c) $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ (d) $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$

FIGURA 15

A que distância à direita da origem você estará quando o gráfico de $y = e^x$ ultrapassar 1 milhão? O próximo exemplo mostra a rapidez do crescimento dessa função dando uma resposta a essa pergunta que poderá surpreendê-lo.

EXEMPLO 5 Use um recurso gráfico para encontrar os valores de x para os quais $e^x > 1.000.000$.

SOLUÇÃO Na Figura 16 fizemos os gráficos de $y = e^x$ e da reta horizontal $y = 1.000.000$. Vemos que essas curvas se interceptam quando $x \approx 13,8$. Assim, $e^x > 10^6$ quando $x > 13,8$. É realmente surpreendente que a função exponencial já ultrapassou 1 milhão quando x é somente 14.

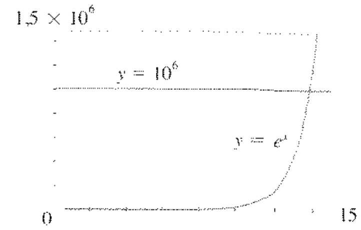


FIGURA 16

1.5 Exercícios

1. (a) Escreva uma equação que defina a função exponencial com base $a > 0$.
   (b) Qual é o domínio dessa função?
   (c) Se $a \neq 1$, qual a imagem dessa função?
   (d) Esboce a forma geral do gráfico da função exponencial nos seguintes casos.
   (i) $a > 1$ (ii) $a = 1$ (iii) $0 < a < 1$

2. (a) Como é definido o número e?
   (b) Qual o valor aproximado de e?
   (c) Qual a função exponencial natural?

3–6 Faça em uma mesma tela os gráficos das funções dadas. Como estão relacionados esses gráficos?

3. $y = 2^x, \quad y = e^x, \quad y = 5^x, \quad y = 20^x$

4. $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad y = 8^x, \quad y = 8^{-x}$

5. $y = 3^x, \quad y = 10^x, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

6. $y = 0,9^x, \quad y = 0,6^x, \quad y = 0,3^x, \quad y = 0,1^x$

7–12 Faça um esboço do gráfico de cada função. Não use calculadora. Utilize somente os gráficos dados nas Figuras 3 e 14 e, se necessário, as transformações da Seção 1.3.

7. $y = 4^x - 3$

8. $y = 4^{x-3}$

9. $y = -2^{-x}$

10. $y = 1 + 2e^x$

11. $y = 3 - e^x$

12. $y = 2 + 5(1 - e^{-x})$

13. Começando com o gráfico de $y = e^x$, escreva as equações correspondentes aos gráficos que resultam de
   (a) deslocar 2 unidades para baixo
   (b) deslocar 2 unidades para a direita
   (c) refletir em torno do eixo x
   (d) refletir em torno do eixo y
   (e) refletir em torno do eixo x e, depois, em torno do eixo y

14. Começando com o gráfico de $y = e^x$, encontre as equações dos gráficos que resultam de
   (a) refletir em torno da reta $y = 4$
   (b) refletir em torno da reta $x = 2$

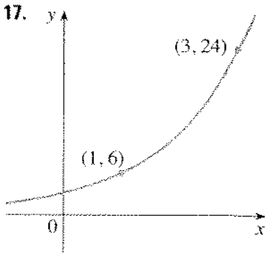
15–16 Encontre o domínio de cada função

15. (a) $f(t) = \dfrac{1}{1 + e^x}$
   (b) $f(t) = \dfrac{1}{1 - e^x}$

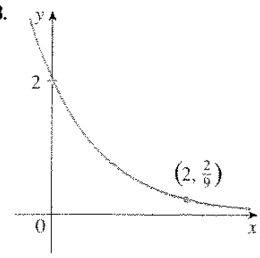
16. (a) $f(t) = \operatorname{sen}(e^{-t})$
   (b) $f(t) = \sqrt{1 - 2^t}$

17–18 Encontre a função exponencial $f(x) = Ca^x$ cujo gráfico é dado.

17.



18.



19. Se $f(x) = 5^x$, mostre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5^x\left(\frac{5^h - 1}{h}\right)$$

20. Suponha que você receba uma oferta para trabalhar por apenas um mês. Qual das seguintes formas de pagamento você prefere?
   I. Um milhão de dólares no fim do mês.
   II. Um centavo de dólar no primeiro dia do mês, dois centavos no segundo dia, quatro centavos no terceiro dia, e, em geral, 2^{n-1} centavos de dólar no n-ésimo dia.

21. Mostre que os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$ foram traçados sobre uma malha coordenada com 1 polegada; então, a uma dis-

tância de 2 pés à direita da origem a altura do gráfico de f é de 48 pés, enquanto a altura do gráfico de g é cerca de 265 milhas.

22. Compare as funções $f(x) = x^5$ e $g(x) = 5^x$ por meio de seus gráficos em várias janelas retangulares. Encontre todas as interseções dos gráficos corretas até uma casa decimal. Para grandes valores de x, qual função cresce mais rapidamente?

23. Compare as funções $f(x) = x^{10}$ e $g(x) = e^x$ por meio dos gráficos f e g em várias janelas retangulares. Quando o gráfico de g ultrapassa o de f?

24. Use um gráfico para estimar os valores de x tais que $e^x > 1.000.000.000$.

25. Sob condições ideais sabe-se que uma certa população de bactérias dobra a cada 3 horas. Supondo que inicialmente existam 100 bactérias

(a) Qual o tamanho da população após 15 horas?
(b) Qual o tamanho da população após t horas?
(c) Qual o tamanho da população após 20 horas?
(d) Faça o gráfico da função população e estime o tempo para a população atingir 50.000 bactérias.

26. Um isótopo do sódio, ^{24}Na, tem uma vida média de 15 horas. Uma amostra desse isótopo tem massa de 2 g.

(a) Encontre a quantidade remanescente após 60 horas.
(b) Encontre a quantidade remanescente após t horas.
(c) Estime a quantidade remanescente após 4 dias.
(d) Use um gráfico para estimar o tempo necessário para que a massa fique reduzida a 0,01 g.

27. Utilize uma calculadora gráfica com capacidade para regressão exponencial para modelar a população mundial com os dados de 1950 a 2000 da Tabela 1 da página 60. Use o modelo para estimar a população em 1993 e para predizer a população em 2010.

28. A tabela fornece a população dos Estados Unidos, em milhões, para os anos 1900 a 2000.

Ano	População	Ano	População
1900	76	1960	179
1910	92	1970	205
1920	106	1980	227
1930	123	1990	250
1940	131	2000	281
1950	150		

Use uma calculadora gráfica com capacidade para regressão exponencial para modelar a população do país desde 1900. Utilize o modelo para estimar a população em 1925 e para predizer a população em 2010 e 2020.

1.6 Funções Inversas e Logaritmos

A Tabela 1 fornece os dados de um experimento no qual uma cultura começou com 100 bactérias em um meio limitado em nutrientes; o tamanho da população foi registrado em intervalos de horas. O número N de bactérias é uma função do tempo t: $N = f(t)$.

Suponha, todavia, que o biólogo mude de idéia e passe a se interessar pelo tempo necessário para a população alcançar vários níveis. Em outras palavras, ele está pensando em t como uma função de N. Essa função, chamada *função inversa* de f, é denotada por f^{-1}, e deve ser lida assim: "inversa de f". Assim, $t = f^{-1}(N)$ é o tempo necessário para o nível da população atingir N. Os valores de f^{-1} podem ser encontrados olhando a Tabela 1 ao reverso ou consultando a Tabela 2. Por exemplo, $f^{-1}(550) = 6$, pois $f(6) = 550$.

TABELA 1 N como uma função de t

t (horas)	$N = f(t)$ = população no instante t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

TABELA 2 t como uma função de N

N	$t = f^{-1}(N)$ = tempo para atingir N bactérias
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

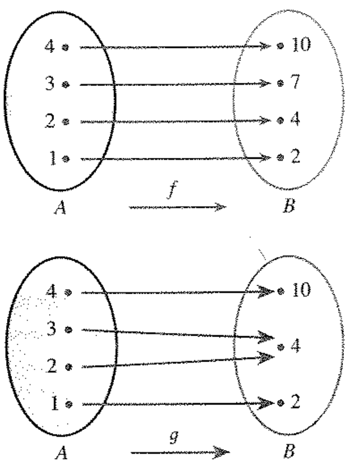


FIGURA 1

Nem todas as funções possuem inversas. Vamos comparar as funções f e g cujo diagrama de flechas está na Figura 1.

Observe que f nunca assume duas vezes o mesmo valor (dois *inputs* quaisquer em A têm *outputs* diferentes), embora g adquira o mesmo valor duas vezes (2 e 3 têm o mesmo *output*, 4). Em símbolos,

$$g(2) = g(3)$$

mas $\qquad f(x_1) \neq f(x_2) \qquad$ sempre que $x_1 \neq x_2$

Funções que tenham essa última propriedade são chamadas *funções um a um*.

Na linguagem de *inputs* e *outputs*, essa definição diz que f é um a um se cada *output* corresponde a um único *input*.

1 Definição Uma função f é chamada **função um a um** se ela nunca assume o mesmo valor duas vezes; isto é,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{sempre que } x_1 \neq x_2$$

Se uma reta horizontal intercepta o gráfico de f em mais de um ponto, então vemos da Figura 2 que existem números x_1 e x_2 tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Isso significa que f não é uma função um a um. Portanto, temos o seguinte método geométrico para determinar se a função é um a um.

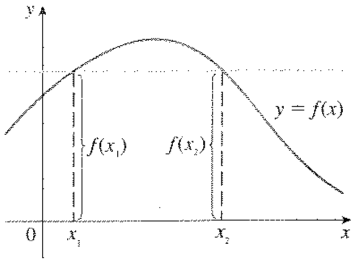


FIGURA 2
Esta função não é um a um, pois $f(x_1) = f(x_2)$

Teste da Reta Horizontal Uma função é um a um se e somente se toda reta horizontal intercepta seu gráfico em apenas um ponto.

EXEMPLO 1 A função $f(x) = x^3$ é um a um?

SOLUÇÃO 1 Se $x_1 \neq x_2$, então $x_1^3 \neq x_2^3$ (dois números diferentes não podem ter o mesmo cubo). Portanto, pela Definição 1, $f(x) = x^3$ é um a um.

SOLUÇÃO 2 Da Figura 3 vemos que toda reta horizontal intercepta o gráfico de $f(x) = x^3$ em apenas um ponto. Logo, pelo Teste da Reta Horizontal, f é um a um.

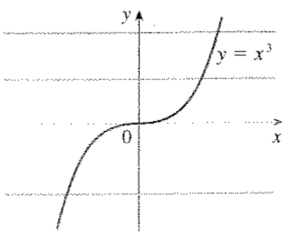


FIGURA 3
$f(x) = x^3$ é um a um

EXEMPLO 2 A função $g(x) = x^2$ é um a um?

SOLUÇÃO 1 A função não é um a um, pois, por exemplo,

$$g(1) = 1 = g(-1)$$

e, portanto, 1 e -1 têm o mesmo *output*.

SOLUÇÃO 2 Da Figura 4 vemos que existem retas horizontais que interceptam o gráfico de g mais de uma vez. Assim, pelo Teste da Reta Horizontal, g não é um a um.

As funções um a um são importantes, pois, precisamente, são as que possuem funções inversas de acordo com a seguinte definição.

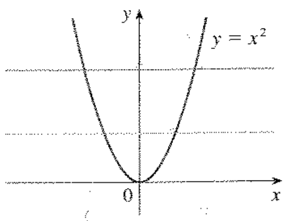


FIGURA 4
$g(x) = x^2$ não é um a um

2 Definição Seja f uma função um a um com domínio A e imagem B. Então sua **função inversa** f^{-1} tem domínio B e imagem A, sendo definida por

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

para todo y em B.

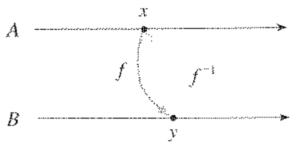


FIGURA 5

Essa definição estabelece que se f transforma x em y, então f^{-1} transforma de volta y em x. (Se f não fosse um a um, então f^{-1} não seria definida de forma única.) O diagrama de flechas da Figura 5 indica que f^{-1} reverte o efeito de f. Note que

$$\boxed{\begin{aligned}\text{domínio de } f^{-1} &= \text{imagem de } f\\ \text{imagem de } f^{-1} &= \text{domínio de } f\end{aligned}}$$

Por exemplo, a função inversa de $f(x) = x^3$ é $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ porque se $y = x^3$, então

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

ADVERTÊNCIA Não confunda -1 de f^{-1} com um expoente. Assim

$$f^{-1}(x) \textit{ não } \text{significa } \frac{1}{f(x)}$$

O recíproco $1/f(x)$ pode, todavia, ser escrito como $[f(x)]^{-1}$.

EXEMPLO 3 Se $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ e $f(8) = -10$, encontre $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(-10)$.

SOLUÇÃO Da definição de f^{-1} temos

$$\begin{aligned} f^{-1}(7) &= 3 \quad &\text{porque} \quad && f(3) = 7\\ f^{-1}(5) &= 1 \quad &\text{porque} \quad && f(1) = 5\\ f^{-1}(-10) &= 8 \quad &\text{porque} \quad && f(8) = -10\end{aligned}$$

O diagrama na Figura 6 torna claro que f^{-1} reverte o efeito de f nesse caso.

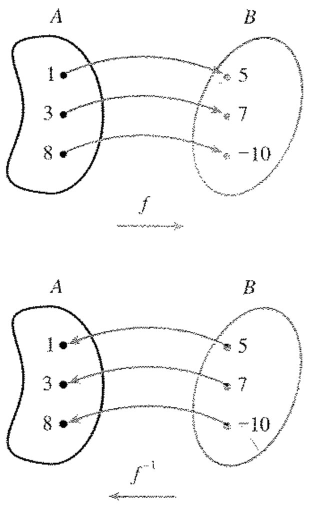


FIGURA 6
A função inversa reverte *inputs* e *outputs*

A letra x é usada tradicionalmente como a variável independente; logo, quando nos concentrarmos em f^{-1} em vez de f, geralmente reverteremos os papéis de x e y na Definição 2 e escreveremos

3 $$\boxed{f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x}$$

Substituindo y na Definição 2 e x na (3), obtemos as seguintes **equações de cancelamento**:

4

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ em } A$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ em } B$$

A primeira lei do cancelamento diz que se começarmos em x, aplicando f e, em seguida, f^{-1}, obteremos de volta x, de onde começamos (veja o diagrama de máquina na Figura 7). Assim, f^{-1} desfaz o que f faz. A segunda equação diz que f desfaz o que f^{-1} faz.

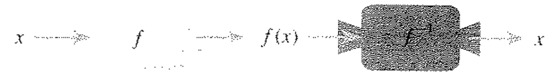


FIGURA 7

Por exemplo, se $f(x) = x^3$, então $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ e a equação de cancelamento fica

$$f^{-1}(f(x)) = (x^3)^{1/3} = x$$
$$f(f^{-1}(x)) = (x^{1/3})^3 = x$$

Essas equações simplesmente dizem que a função cubo e a função raiz cúbica cancelam-se de modo recíproco quando aplicadas sucessivamente.

Vamos ver agora como computar as funções inversas. Se tivermos uma função $y = f(x)$ e formos capazes de resolver essa equação para x em termos de y, então, de acordo com a Definição 2, devemos ter $x = f^{-1}(y)$. Se quisermos chamar a variável independente de x, trocamos x por y e chegamos à equação $y = f^{-1}(x)$.

5 Como Achar a Função Inversa de uma Função f Um a Um

Passo 1 Escreva $y = f(x)$.

Passo 2 Resolva essa equação para x em termos de y (se possível).

Passo 3 Para expressar f^{-1} como uma função de x, troque x por y. A equação resultante é $y = f^{-1}(x)$.

EXEMPLO 4 Encontre a função inversa de $f(x) = x^3 + 2$.

SOLUÇÃO De acordo com (5) escrevemos

$$y = x^3 + 2$$

Então resolvemos essa equação para x:

$$x^3 = y - 2$$
$$x = \sqrt[3]{y - 2}$$

Finalmente, trocando x por y:

$$y = \sqrt[3]{x - 2}$$

Portanto, a função inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$.

No Exemplo 4, note como f^{-1} reverte o efeito de f. A função f estabelece que "eleve ao cubo e então adicione 2"; f^{-1} estabelece que "subtraia 2 e então tome a raiz cúbica".

O princípio de trocar x por y para encontrar a função inversa também nos dá um método de obter o gráfico de f^{-1} a partir de f. Uma vez que $f(a) = b$ se e somente se $f^{-1}(b) = a$, o ponto (a, b) está no gráfico de f se e somente se o ponto (b, a) estiver sobre o gráfico de f^{-1}. Mas obtemos o ponto (b, a) de (a, b) refletindo-o em torno da reta $y = x$ (veja a Figura 8).

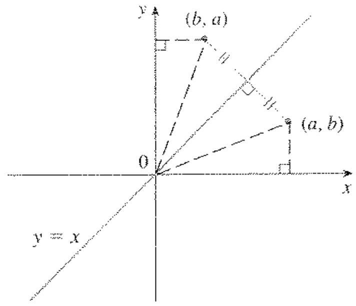


FIGURA 8

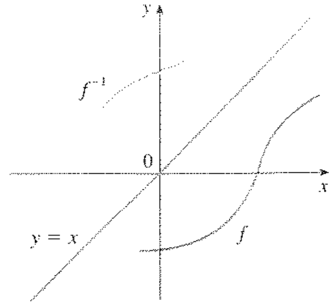


FIGURA 9

Portanto, conforme ilustrado na Figura 9:

> O gráfico de f^{-1} é obtido refletindo-se o gráfico de f em torno da reta $y = x$.

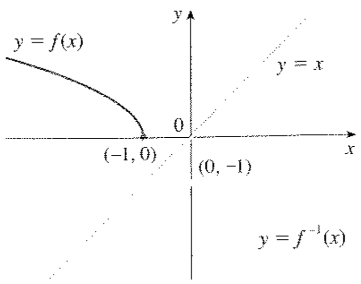


FIGURA 10

EXEMPLO 5 □ Esboce os gráficos de $f(x) = \sqrt{-1 - x}$ e de sua função inversa usando o mesmo sistema de coordenadas.

SOLUÇÃO Esboçamos primeiro a curva $y = \sqrt{-1 - x}$ (a metade superior da parábola $y^2 = -1 - x$ ou $x = -y^2 - 1$), e então refletindo em torno da reta $y = x$ obtemos o gráfico de f^{-1} (veja a Figura 10). Conforme pode ser verificado em nosso gráfico, observe que a expressão para f^{-1} é $f^{-1}(x) = -x^2 - 1, x \geqslant 0$. Assim, o gráfico de f^{-1} é a metade à direita da parábola $y = -x^2 - 1$, e isso parece razoável pela Figura 10.

Funções Logarítmicas

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, a função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente ou decrescente, e, portanto, um a um pelo Teste da Reta Horizontal. Assim, existe uma função inversa f^{-1}, chamada **função logarítmica com base *a*** denotada por $\log_a$. Se usarmos a formulação de função inversa dada por (3)

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

teremos

6 $$\boxed{\log_a x = y \iff a^y = x}$$

Dessa forma, se $x > 0$, então $\log_a x$ é o expoente ao qual deve se elevar a base a para se obter x. Por exemplo, $\log_{10} 0{,}001 = -3$ porque $10^{-3} = 0{,}001$.

As equações de cancelamento (4), quando aplicadas a $f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$, ficam assim:

7 $$\boxed{\begin{aligned} \log_a(a^x) &= x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ a^{\log_a x} &= x \quad \text{para todo } x > 0 \end{aligned}}$$

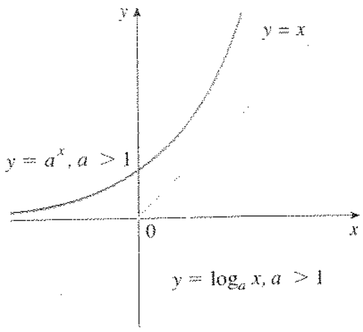


FIGURA 11

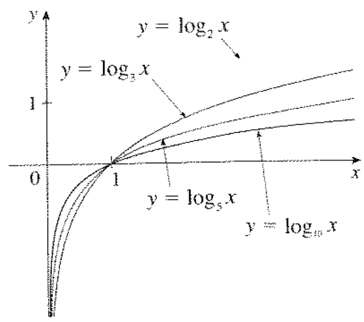


FIGURA 12

Notação para Logaritmos
Na maioria dos livros de cálculo e ciências, bem como nas calculadoras, a notação usada para os logaritmos naturais é $\ln x$, enquanto a de $\log x$ é utilizada para "logaritmos comuns", $\log_{10} x$. Em textos mais avançados de matemática e literatura científica, e em linguagens de computação, porém, a notação $\log x$ geralmente denota o logaritmo natural.

A função logarítmica $\log_a$ tem o domínio $(0, \infty)$ e a imagem $\mathbb{R}$. Seu gráfico é a reflexão do gráfico de $y = a^x$ em torno da reta $y = x$.

A Figura 11 mostra o caso em que $a > 1$. (As funções logarítmicas mais importantes têm base $a > 1$.) O fato de que $y = a^x$ é uma função que cresce muito rapidamente para $x > 0$ está refletido no fato de que $y = \log_a x$ é uma função de crescimento muito lento para $x > 1$.

A Figura 12 mostra os gráficos de $y = \log_a x$ com vários valores da base a. Uma vez que $\log_a 1 = 0$, os gráficos de todas as funções logarítmicas passam pelo ponto $(1, 0)$.

As seguintes propriedades das funções logarítmicas resultam das propriedades correspondentes das funções exponenciais dadas na Seção 1.5.

Leis dos Logaritmos Se x e y forem números positivos, então

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3. $\log_a(x^r) = r \log_a x$ (onde r é qualquer número real)

EXEMPLO 6 Use as leis dos logaritmos para calcular $\log_2 80 - \log_2 5$.

SOLUÇÃO Usando a Lei 2, temos

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4$$

porque $2^4 = 16$.

Logaritmos Naturais

De todas as possíveis bases a para os logaritmos, veremos no Capítulo 3 que a escolha mais conveniente para uma base é e, definido na Seção 1.5. Os logaritmos na base e são chamados **logaritmos naturais** e têm uma notação especial:

$$\log_e x = \ln x$$

Se fizermos $a = e$ e substituirmos $\log_e$ por "ln" em (6) e (7), então as propriedades que definem a função logaritmo natural ficam

8 $$\ln x = y \iff e^y = x$$

9 $$\ln(e^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$e^{\ln x} = x \qquad x > 0$$

Em particular, se fizermos $x = 1$, obteremos

$$\ln e = 1$$

EXEMPLO 7 Encontre x sendo $\ln x = 5$.

SOLUÇÃO 1 De (8) vemos que

$$\ln x = 5 \qquad \text{significa} \qquad e^5 = x$$

Portanto, $x = e^5$.

(Se você tiver problemas com a notação "ln", substitua-a por $\log_e$. Então a equação torna-se $\log_e x = 5$; portanto, pela definição de logaritmo, $e^5 = x$.)

SOLUÇÃO 2 Comece com a equação

$$\ln x = 5$$

e então aplique a função exponencial a ambos os lados da equação:

$$e^{\ln x} = e^5$$

Mas a segunda equação do cancelamento em (9) estabelece que $e^{\ln x} = x$. Portanto, $x = e^5$.

EXEMPLO 8 Resolva a equação $e^{5-3x} = 10$.

SOLUÇÃO Tomando-se o logaritmo natural de ambos os lados da equação e usando (9):

$$\begin{aligned} \ln(e^{5-3x}) &= \ln 10 \\ 5 - 3x &= \ln 10 \\ 3x &= 5 - \ln 10 \\ x &= \tfrac{1}{3}(5 - \ln 10) \end{aligned}$$

Uma vez que o logaritmo natural é encontrado em calculadoras científicas, podemos aproximar a solução para quatro casas decimais: $x \approx 0{,}8991$.

EXEMPLO 9 Expresse $\ln a + \frac{1}{2}\ln b$ como um único logaritmo.

SOLUÇÃO Usando as Leis 3 e 1 dos logaritmos, temos

$$\begin{aligned} \ln a + \tfrac{1}{2}\ln b &= \ln a + \ln b^{1/2} \\ &= \ln a + \ln\sqrt{b} \\ &= \ln(a\sqrt{b}) \end{aligned}$$

A fórmula a seguir mostra que os logaritmos com qualquer base podem ser expressos em termos dos logaritmos naturais.

10 **Fórmula de Mudança de Base** Para todos os números positivos a ($a \neq 1$), temos

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Prova Seja $y = \log_a x$. Então, de (6), temos $a^y = x$. Tomando-se os logaritmos naturais de ambos os lados da equação, obtemos $y \ln a = \ln x$. Portanto

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

As calculadoras científicas têm uma tecla para os logaritmos naturais; assim, a Fórmula 10 nos capacita a usar a calculadora para computar o logaritmo em qualquer base (conforme mostra o próximo exemplo). Do mesmo modo, a Fórmula 10 nos permite fazer o gráfico de qualquer função logarítmica em calculadoras e computadores (veja os Exercícios 43 e 44).

EXEMPLO 10 Calcule $\log_8 5$ correta até a sexta casa decimal.

SOLUÇÃO A Fórmula 10 nos dá

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0{,}773976$$

EXEMPLO 11 No Exemplo 3 da Seção 1.5 mostramos que a massa do ^{90}Sr que permanece após t anos de uma amostra com 24 mg é $m = f(t) = 24 \cdot 2^{-t/25}$. Encontre a função inversa e interprete-a.

SOLUÇÃO Precisamos resolver a equação $m = 24 \cdot 2^{-t/25}$ para t. Vamos começar tomando os logaritmos naturais de ambos os lados:

$$2^{-t/25} = \frac{m}{24}$$

$$\ln\left(2^{-t/25}\right) = \ln\frac{m}{24}$$

$$-\frac{t}{25}\ln 2 = \ln m - \ln 24$$

$$-\frac{25}{\ln 2}(\ln m - \ln 24) = \frac{25}{\ln 2}(\ln 24 - \ln m)$$

Logo, a função inversa é

$$f^{-1}(m) = \frac{25}{\ln 2}(\ln 24 - \ln m)$$

Essa função dá o tempo necessário para a massa decair para m miligramas. Em particular, o tempo requerido para a massa ficar reduzida a 5 mg é

$$t = f^{-1}(5) = \frac{25}{\ln 2}(\ln 24 - \ln 5) \approx 56{,}58 \text{ anos}$$

Essa resposta está de acordo com o gráfico estimado feito no Exemplo 3 da Seção 1.5.

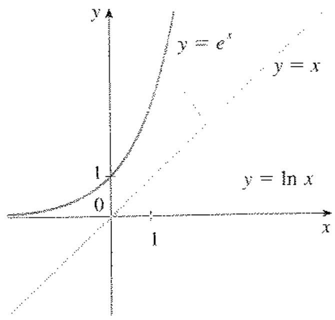


FIGURA 13

Os gráficos da função exponencial $y = e^x$ e de sua função inversa, o logaritmo natural, estão na Figura 13. Uma vez que a curva $y = e^x$ cruza o eixo y com uma inclinação de 1, segue que a curva $y = \ln x$ cruza o eixo x com uma inclinação de 1.

Assim como todas as outras funções logarítmicas com base maior que 1, o logaritmo natural é uma função crescente definida em $(0, \infty)$ e com o eixo y como assíntota vertical. (Ou seja, os valores de $\ln x$ ficam negativamente muito grandes quando x tende a 0.)

EXEMPLO 12 Esboce o gráfico da função $y = \ln(x - 2) - 1$.

SOLUÇÃO Começamos pelo gráfico $y = \ln x$ dado na Figura 13. Usando as transformações da Seção 1.3, o deslocamos duas unidades para a direita, obtendo o gráfico de $y = \ln(x - 2)$ e então o deslocamos uma unidade para cima, para obter o gráfico de $y = \ln(x - 2) - 1$ (veja a Figura 14).

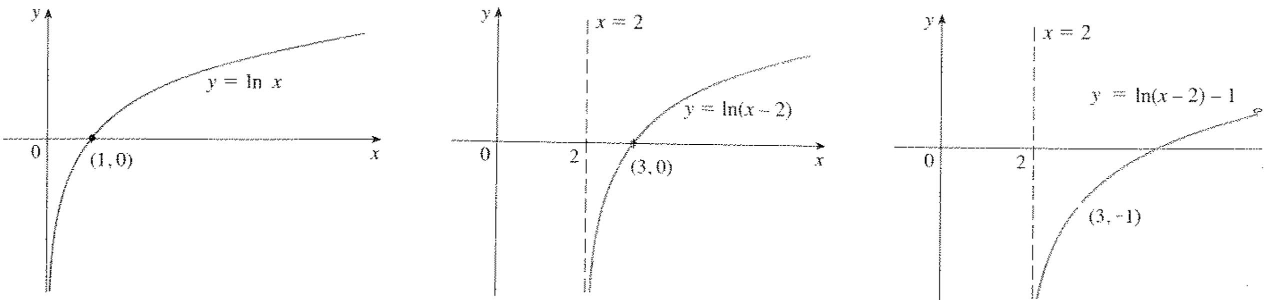


FIGURA 14

Embora $\ln x$ seja uma função crescente, seu crescimento é *muito* lento quando $x > 1$. De fato, $\ln x$ cresce mais lentamente que qualquer potência de x. Para ilustrar esse fato, vamos comparar os valores aproximados das funções $y = \ln x$ e $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ na tabela a seguir, bem como em seus gráficos nas Figuras 15 e 16. Você pode ver que inicialmente os gráficos de $y = \sqrt{x}$ e $y = \ln x$ crescem a taxas comparáveis, mas, finalmente, a função raiz ultrapassa muito o logaritmo.

x	1	2	5	10	50	100	500	1.000	10.000	100.000
$\ln x$	0	0,69	1,61	2,30	3,91	4,6	6,2	6,9	9,2	11,5
$\sqrt{x}$	1	1,41	2,24	3,16	7,07	10,0	22,4	31,6	100	316
$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0	0,49	0,72	0,73	0,55	0,46	0,28	0,22	0,09	0,04

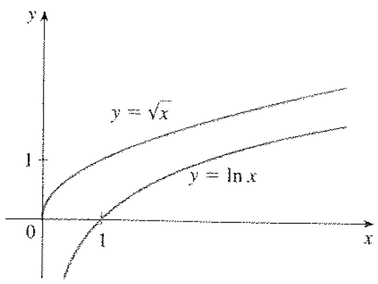


FIGURA 15

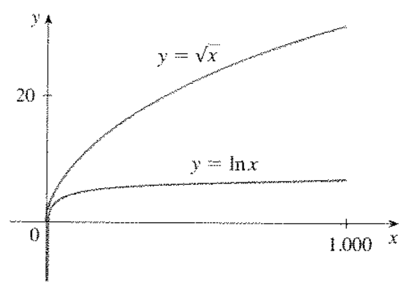


FIGURA 16

Funções Inversas Trigonométricas

Quando tentamos encontrar as funções inversas trigonométricas, temos uma dificuldade sem muita importância. Como as funções trigonométricas não são funções um a um, elas não têm funções inversas. A dificuldade é superada restringindo-se os domínios dessas funções de forma a torná-las um a um.

Você pode ver da Figura 17 que a função seno $y = \operatorname{sen} x$ não é um a um (use o Teste da Reta Horizontal). Mas a função $f(x) = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$ (veja a Figura 18) *é* um a um. A função inversa dessa função seno restrita f existe e é denotada por sen^{-1}, ou arcsen. Ela é chamada **inversa da função seno**, ou **função arcsen**.

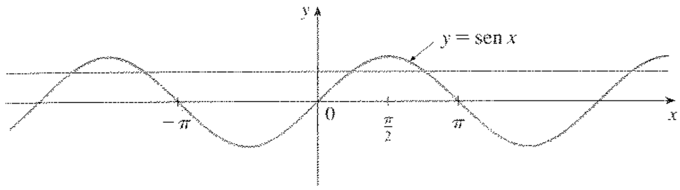


FIGURA 17

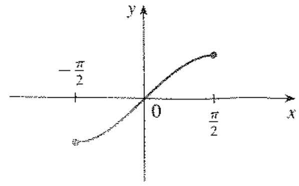


FIGURA 18 $y = \operatorname{sen} x, -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

Uma vez que a definição de uma função inversa diz que

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

temos

$$\boxed{\operatorname{sen}^{-1} x = y \iff \operatorname{sen} y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}}$$

$\operatorname{sen}^{-1} x \neq \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

Assim, se $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $\operatorname{sen}^{-1} x$ é o número entre $-\pi/2$ e $\pi/2$ cujo seno é x.

EXEMPLO 13 Calcule (a) $\operatorname{sen}^{-1}(\frac{1}{2})$ e (b) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} \frac{1}{3})$.

SOLUÇÃO

(a) Temos

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

porque $\operatorname{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$ e $\pi/6$ situa-se entre $-\pi/2$ e $\pi/2$.

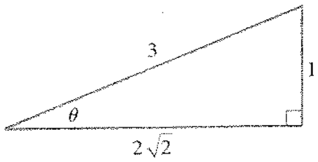


FIGURA 19

(b) Seja $\theta = \operatorname{arcsen} \frac{1}{3}$, logo $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{3}$. Então podemos desenhar um triângulo retângulo com o ângulo θ, como na Figura 19 e deduzir do Teorema de Pitágoras que o terceiro lado tem comprimento $\sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$. Isso nos possibilita interpretar a partir do triângulo que

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} \tfrac{1}{3}) = \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

O cancelamento de equações para as funções inversas torna-se, nesse caso,

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x & \text{para } -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x & \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{array}}$$

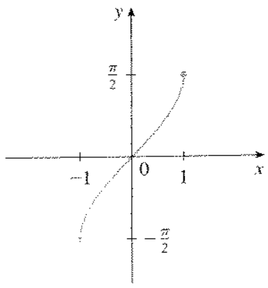


FIGURA 20

$y = \operatorname{sen}^{-1} x = \operatorname{arcsen} x$

A função inversa do seno, sen^{-1}, tem domínio $[-1, 1]$ e imagem $[-\pi/2, \pi/2]$, e seu gráfico, mostrado na Figura 20, é obtido daquela restrição da função seno (Figura 18) por reflexão sobre a reta $y = x$.

A **função inversa do cosseno** é tratada de modo similar. A função cosseno restrita $f(x) = \cos x, 0 \leqslant x \leqslant \pi$, é um a um (veja a Figura 21); logo, ela tem uma função inversa denotada por $\cos^{-1}$ ou arccos.

$$\boxed{\cos^{-1} x = y \iff \cos y = x \quad \text{e} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi}$$

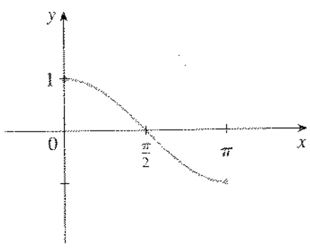


FIGURA 21

$y = \cos x, 0 \leqslant x \leqslant \pi$

As equações de cancelamento são

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos^{-1}(\cos x) = x & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ \cos(\cos^{-1} x) = x & \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{array}}$$

A função inversa do cosseno, $\cos^{-1}$, tem domínio $[-1, 1]$ e imagem $[0, \pi]$. Seu gráfico está mostrado na Figura 22.

A função tangente pode se tornar um a um restringindo-se ao intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Assim, a **função inversa da tangente** é definida como a inversa da função $f(x) = \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$ (veja a Figura 23). Ela é denotada por tg^{-1}, ou arctg.

$$\operatorname{tg}^{-1}x = y \iff \operatorname{tg} y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

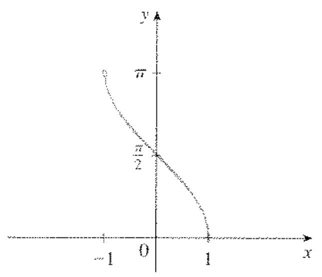


FIGURA 22 $y = \cos^{-1}x = \arccos x$

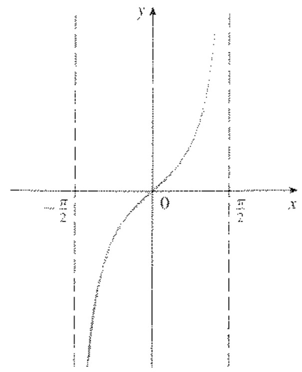


FIGURA 23 $y = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

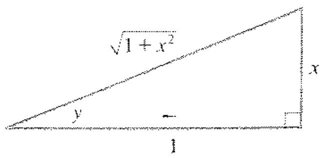


FIGURA 24

EXEMPLO 14 ☐ Simplifique a expressão $\cos(\operatorname{tg}^{-1}x)$.

SOLUÇÃO 1 Seja $y = \operatorname{tg}^{-1} x$. Então $\operatorname{tg} y = x$ e $-\pi/2 < y < \pi/2$. Queremos determinar $\cos y$, mas, uma vez que $\operatorname{tg} y$ é conhecida, é mais fácil determinar $\sec y$ primeiro:

$$\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$$

$$\sec y = \sqrt{1 + x^2} \qquad \text{(uma vez que } \sec y > 0 \text{ para } -\pi/2 < y < \pi/2\text{)}$$

Assim $$\cos(\operatorname{tg}^{-1}x) = \cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

SOLUÇÃO 2 Em vez de usar as identidades trigonométricas como na Solução 1, talvez seja mais fácil usar um diagrama. Se $y = \operatorname{tg}^{-1} x$, então $\operatorname{tg} y = x$, e podemos concluir da Figura 24 (que ilustra o caso $y > 0$) que

$$\cos(\operatorname{tg}^{-1}x) = \cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

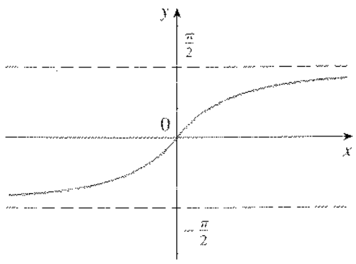


FIGURA 25

$y = \operatorname{tg}^{-1}x = \operatorname{arctg} x$

A função inversa da tangente, $\operatorname{tg}^{-1} = \operatorname{arctg}$, tem domínio $\mathbb{R}$ e imagem $(-\pi/2, \pi/2)$. O gráfico está mostrado na Figura 25.

Sabemos que as retas $x = \pm\pi/2$ são assíntotas verticais do gráfico da tangente. Uma vez que o gráfico da tg^{-1} é obtido refletindo-se o gráfico da função tangente restrita em torno da reta $y = x$, segue que as retas $y = \pi/2$ e $y = -\pi/2$ são assíntotas horizontais do gráfico de tg^{-1}.

As funções inversas trigonométricas restantes não são usadas com freqüência e estão resumidas aqui.

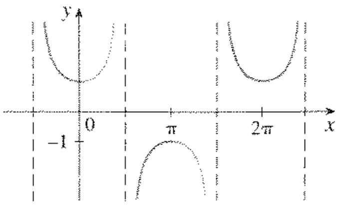


FIGURA 26 $y = \sec x$

19
$$y = \operatorname{cossec}^{-1} x \ (|x| \geq 1) \iff \operatorname{cossec} y = x \quad \text{e} \quad y \in (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2]$$

$$y = \sec^{-1}x \ (|x| \geq 1) \iff \sec y = x \quad \text{e} \quad y \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$$

$$y = \operatorname{cotg}^{-1}x \ (x \in \mathbb{R}) \iff \operatorname{cotg} y = x \quad \text{e} \quad y \in (0, \pi)$$

A escolha dos intervalos para y nas definições de $\operatorname{cossec}^{-1}$ e $\sec^{-1}$ não são de aceitação universal. Por exemplo, alguns autores usam $y \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ na definição de $\sec^{-1}$. (Você pode ver do gráfico da função secante da Figura 26 que ambas as escolhas vão funcionar.)

1.6 Exercícios

1. (a) O que é uma função um a um?
(b) A partir do gráfico, como dizer se uma função é um a um?

2. (a) Seja f uma função um a um com domínio A e imagem B. Como é definida a função inversa f^{-1}? Qual o domínio de f^{-1}? Qual a imagem de f^{-1}?
(b) Se for dada uma fórmula para f, como você encontrará uma fórmula para f^{-1}?
(c) Se for dado o gráfico de f, como você encontrará o gráfico de f^{-1}?

3–14 Uma função f pode ser dada por uma tabela de valores, um gráfico, uma fórmula ou por meio de descrição verbal. Determine se f é um a um.

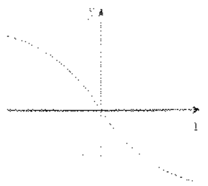
3.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.5	2.0	3.6	5.3	2.8	2.0

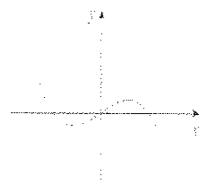
4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	2	4	8	16	32

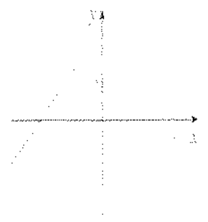
5.



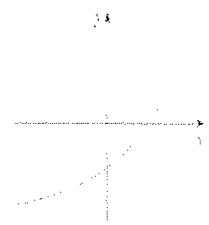
6.



7.



8.



9. $f(x) = \frac{1}{2}(x+5)$

10. $f(x) = 1 + 4x - x^2$

11. $g(x) = |x|$

12. $g(x) = \sqrt{x}$

13. $f(t)$ é a altura de uma bola t segundos após ser chutada.

14. $f(t)$ é sua altura no tempo t.

15–16 Use um gráfico para decidir se f é um a um.

15. $f(x) = x^3 - x$

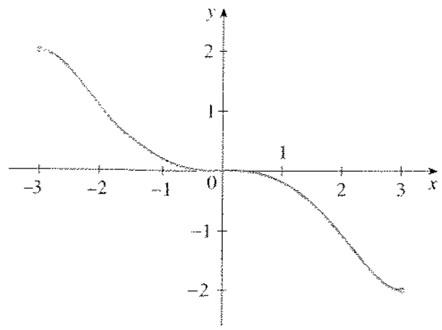
16. $f(x) = x^3 + x$

17. Se f for uma função um a um tal que $f(2) = 9$, quanto é $f^{-1}(9)$?

18. Se $f(x) = 3 + x^2 + \operatorname{tg}(\pi x/2)$, onde $-1 < x < 1$,
(a) Encontre $f^{-1}(3)$. (b) Encontre $f(f^{-1}(5))$.

19. Se $g(x) = 3 + x + e^x$, ache $g^{-1}(4)$.

20. É dado o gráfico de f.
(a) Por que f é um a um?
(b) Determine o domínio e a imagem de f^{-1}.
(c) Estime o valor de $f^{-1}(1)$.



21. A fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, onde $F \geqslant -459{,}67$, expressa a temperatura C em graus Celsius como uma função da temperatura F em graus Fahrenheit. Encontre uma fórmula p a função inversa e interprete-a. Qual o domínio da função invers

22. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula com uma velocidade v é

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa da partícula no repouso e c é a velocidade luz no vácuo. Encontre a função inversa de f e explique seu significado.

23–28 Encontre uma fórmula para a função inversa.

23. $f(x) = \sqrt{10 - 3x}$

24. $f(x) = \dfrac{4x-1}{2x+3}$

25. $f(x) = e^{x^3}$

26. $y = 2x^3 + 3$

27. $y = \ln(x + 3)$

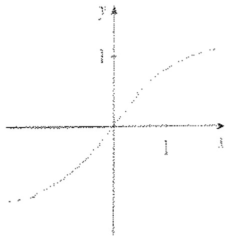
28. $y = \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$

29–30 Encontre uma fórmula explícita de f^{-1} e use-a para faze na mesma tela os gráficos de f^{-1}, f e da reta $y = x$. Para verificar seu trabalho, veja se seus gráficos de f e f^{-1} são reflexões em torn da reta.

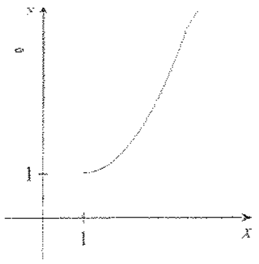
29. $f(x) = 1 - 2/x^2$, $x > 0$

30. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$, $x > 0$

31. Use o gráfico dado de f para esboçar o de f^{-1}.



32. Use o gráfico dado de f para esboçar os gráficos de f^{-1} e $1/f$.



33. (a) Como está definida a função logarítmica $y = \log_a x$?
(b) Qual o domínio dessa função?
(c) Qual a imagem dessa função?
(d) Esboce a forma geral do gráfico da função $y = \log_a x$ se $a > 1$.

34. (a) O que é o logaritmo natural?
(b) O que é o logaritmo comum?
(c) Esboce os gráficos no mesmo conjunto de eixos das funções logaritmo natural e exponencial natural.

35–38 □ Encontre o valor exato de cada expressão.

35. (a) $\log_2 64$ (b) $\log_6 \frac{1}{36}$

36. (a) $\log_8 2$ (b) $\ln e^{\sqrt{2}}$

37. (a) $\log_{10} 1{,}25 + \log_{10} 80$
(b) $\log_5 10 + \log_5 20 - 3\log_5 2$

38. (a) $2^{(\log_2 3 + \log_2 5)}$ (b) $e^{3\ln 2}$

39–41 □ Expresse a quantidade dada como um único logaritmo.

39. $2\ln 4 - \ln 2$

40. $\ln x + a\ln y - b\ln z$

41. $\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln x - \ln \operatorname{sen} x$

42. Use a Fórmula 10 para computar cada logaritmo correto até a sexta casa decimal.
(a) $\log_{12} 10$ (b) $\log_2 8{,}4$

43–44 □ Use a Fórmula 10 para fazer o gráfico das funções dadas em uma mesma tela. Como estão relacionados esses gráficos?

43. $y = \log_{1,5} x$, $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = \log_{50} x$

44. $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = e^x$, $y = 10^x$

45. Suponha que o gráfico de $y = \log_2 x$ é feito sobre uma malha coordenada onde a unidade de comprimento é de 1 polegada. Quantas milhas à direita da origem devemos percorrer antes de a altura da curva atingir 3 pés?

46. Compare as funções $f(x) = x^{0,1}$ e $g(x) = \ln x$ por meio de seus gráficos f e g em várias janelas retangulares. Quando finalmente o gráfico de f ultrapassa o de g?

47–48 □ Faça o esboço do gráfico de cada função. Não use a calculadora. Use somente os gráficos dados nas Figuras 12 e 13 e, se necessário, as transformações da Seção 1.3.

47. (a) $y = \log_{10}(x+5)$ (b) $y = -\ln x$

48. (a) $y = \ln(-x)$ (b) $y = \ln|x|$

49–52 □ Resolva cada equação em x.

49. (a) $2\ln x = 1$ (b) $e^{-x} = 5$

50. (a) $e^{2x+3} - 7 = 0$ (b) $\ln(5 - 2x) = -3$

51. (a) $2^{x-5} = 3$ (b) $\ln x + \ln(x-1) = 1$

52. (a) $\ln(\ln x) = 1$ (b) $e^{ax} = Ce^{bx}$, onde $a \neq b$

53–54 □ Resolva as equações em x.

53. (a) $e^x < 10$ (b) $\ln x > -1$

54. (a) $2 < \ln x < 9$ (b) $e^{2-3x} > 4$

55–56 □ Determine (a) o domínio de f e (b) f^{-1} e seu domínio.

55. $f(x) = \sqrt{3 - e^{2x}}$ **56.** $f(x) = \ln(2 + \ln x)$

57. Faça o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ e explique por que ela é um a um. Use então um CAS para encontrar uma expressão explícita para $f^{-1}(x)$. (Seu CAS vai produzir três expressões possíveis. Explique por que duas delas são irrelevantes neste contexto.)

58. (a) Se $g(x) = x^6 + x^4, x \geq 0$, use um sistema algébrico computacional para encontrar uma expressão para $g^{-1}(x)$.
(b) Use a expressão da parte (a) para fazer um gráfico na mesma tela de $y = g(x)$, $y = x$ e $y = g^{-1}(x)$.

59. Se a população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas, então o número de bactérias após t horas é $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$ (veja o Exercício 25 na Seção 1.5).
(a) Encontre a função inversa e explique seu significado.
(b) Quando a população atingirá 50.000 bactérias?

60. Após acionado o *flash* de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do *flash*, o qual armazena uma carga elétrica dada por

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a})$$

(A capacidade máxima de carga é Q_0, e t é medido em segundos.)
(a) Encontre a função inversa e explique seu significado.
(b) Quanto tempo levará para o capacitor recarregar 90% da capacidade se $a = 2$?

61. Começando pelo gráfico de $y = \ln x$, encontre a equação do gráfico que resulta de
(a) deslocar 3 unidades para cima
(b) deslocar 3 unidades para a esquerda
(c) fazer a reflexão em torno do eixo x

(d) fazer a reflexão em torno do eixo y
(e) fazer a reflexão em torno da reta $y = x$
(f) fazer a reflexão em torno do eixo x e então em torno da reta $y = x$
(g) fazer a reflexão em torno do eixo y e então em torno da reta $y = x$
(h) deslocar 3 unidades para a esquerda e então fazer a reflexão em torno da reta $y = x$

62. (a) Se deslocarmos uma curva para a esquerda, o que acontecerá com sua reflexão em torno da reta $y = x$? Em vista desse princípio geométrico, encontre uma expressão para a inversa de $g(x) = f(x + c)$, onde f é uma função um a um.
(b) Encontre uma expressão para a inversa de $h(x) = f(cx)$, onde $c \neq 0$.

63–68 Encontre o valor exato de cada expressão.

63. (a) $\text{sen}^{-1}\left(\sqrt{3}/2\right)$ (b) $\cos^{-1}(-1)$

64. (a) $\text{arctg}\,(-1)$ (b) $\csc^{-1} 2$

65. (a) $\text{tg}^{-1}\sqrt{3}$ (b) $\text{arcsen}\left(-1/\sqrt{2}\right)$

66. (a) $\sec^{-1}\sqrt{2}$ (b) $\text{arcsen}\ 1$

67. (a) $\text{sen}\,(\text{sen}^{-1}\,0{,}7)$ (b) $\text{tg}^{-1}\left(\text{tg}\,\dfrac{4\pi}{3}\right)$

68. (a) $\sec\,(\text{arctg}\,2)$ (b) $\cos\left(2\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)\right)$

69. Prove que $\cos\left(\text{sen}^{-1} x\right) = \sqrt{1 - x^2}$

70–72 Simplifique a expressão.

70. $\text{tg}\,(\text{sen}^{-1} x)$ **71.** $\text{sen}\,(\text{tg}^{-1} x)$

72. $\text{sen}\,(2\cos^{-1} x)$

73–74 Obtenha os gráficos das funções dadas em uma mesma tela. Como esses gráficos estão relacionados?

73. $y = \text{sen}\,x;\quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2,\quad y = \text{sen}^{-1} x,\ y = x$

74. $y = \text{tg}\,x;\quad -\pi/2 < x < \pi/2,\quad y = \text{tg}^{-1} x,\ y = x$

75. Determine o domínio e a imagem da função $g(x) = \text{sen}^{-1}\,(3x +$

76. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = \text{sen}\,(\text{sen}^{-1}x)$ e explique su aparência.
(b) Faça o gráfico da função $g(x) = \text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\,x)$. Como você pode explicar a aparência desse gráfico?

1 Revisão

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. (a) O que é uma função? O que são domínio e imagem da função?
(b) O que é o gráfico de uma função?
(c) Como, a partir de uma curva dada, sabemos tratar-se de um gráfico de uma função?

2. Discuta as quatro maneiras de representar uma função. Ilustre com exemplos.

3. (a) O que é uma função par? Como saber a partir do gráfico se uma função é par ou não?
(b) O que é uma função ímpar? Como saber a partir do gráfico se uma função é ímpar ou não?

4. O que é uma função crescente?

5. O que é um modelo matemático?

6. Dê um exemplo de cada tipo de função.
(a) Função linear (b) Função potência
(c) Função exponencial (d) Função quadrática
(e) Função polinomial de grau 5 (f) Função racional

7. Esboce à mão no mesmo conjunto de eixos os gráficos das seguintes funções.
(a) $f(x) = x$ (b) $g(x) = x^2$
(c) $h(x) = x^3$ (d) $j(x) = x^4$

8. Esboce à mão o gráfico de cada função.
(a) $y = \text{sen}\,x$ (b) $y = \text{tg}\,x$
(c) $y = e^x$ (d) $y = \ln x$
(e) $y = 1/x$ (f) $y = |x|$
(g) $y = \sqrt{x}$ (h) $y = \text{tg}^{-1} x$

9. Suponha que os domínios de f e g sejam A e B, respectivamente.
(a) Qual o domínio de $f + g$?
(b) Qual o domínio de fg?
(c) Qual o domínio de f/g?

10. Como está definida a função composta $f \circ g$? Qual seu domínio?

11. Suponha que seja dado o gráfico de f. Escreva uma equação para ca um dos gráficos obtidos a partir do gráfico de f da seguinte forma.
(a) Deslocando 2 unidades para cima.
(b) Deslocando 2 unidades para baixo.
(c) Deslocando 2 unidades para a direita.
(d) Deslocando 2 unidades para a esquerda.
(e) Refletindo em torno do eixo x.
(f) Refletindo em torno do eixo y.
(g) Esticando verticalmente por um fator de 2.
(h) Encolhendo verticalmente por um fator de 2.
(i) Esticando horizontalmente por um fator de 2.
(j) Encolhendo horizontalmente por um fator de 2.

12. (a) O que é uma função um a um? Como decidir pelo gráfic se uma função é um a um?
(b) Seja f uma função um a um. Como está definida sua funçã inversa f^{-1}? Como obter o gráfico de f^{-1} a partir do de f

13. (a) Como a inversa da função seno $f(x) = \text{sen}^{-1} x$ é definida? O que é o seu domínio e o que é a sua imagem?
(b) Como a inversa da função cosseno $f(x) = \cos^{-1} x$ é definid O que é o seu domínio e o que é a sua imagem?
(c) Como a inversa da função seno $f(x) = \text{tg}^{-1} x$ é definida? O que é o seu domínio e o que é a sua imagem?

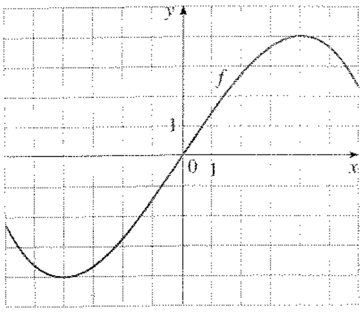
TESTES FALSO-VERDADEIRO

Determine se a afirmativa é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, também explique ou dê um exemplo em que a afirmativa não funciona.

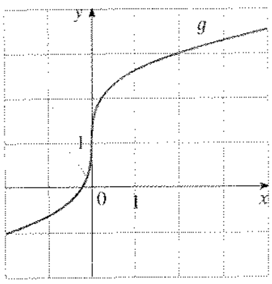
1. Se f for uma função, então $f(s + t) = f(s) + f(t)$.
2. Se $f(s) = f(t)$, então $s = t$.
3. Se f for uma função, então $f(3x) = 3f(x)$.
4. Se $x_1 < x_2$ e f for uma função decrescente, então, $f(x_1) > f(x_2)$.
5. Uma reta vertical intercepta o gráfico de uma função no máximo uma vez.
6. Se f e g são funções, então $f \circ g = g \circ f$.
7. Se f for um a um, então $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
8. É sempre possível dividir por e^x.
9. Se $0 < a < b$, então $\ln a < \ln b$.
10. Se $x > 0$, então $(\ln x)^6 = 6 \ln x$.
11. Se $x > 0$ e $a > 1$, então $\dfrac{\ln x}{\ln a} = \ln \dfrac{x}{a}$.

EXERCÍCIOS

1. Seja f uma função cujo gráfico é dado.
   (a) Estime o valor de $f(2)$.
   (b) Estime os valores de x tais que $f(x) = 3$.
   (c) Estabeleça o domínio de f.
   (d) Estabeleça a imagem de f.
   (e) Sobre que intervalo a função f está crescendo?
   (f) f é um a um? Explique.
   (g) f é par, ímpar ou nenhum dos dois? Explique.



2. É dado o gráfico de g.
   (a) Estabeleça o valor de $g(2)$.
   (b) Por que g é um a um?
   (c) Estime o valor de $g^{-1}(2)$.
   (d) Estime o domínio de g^{-1}.
   (e) Esboce o gráfico de g^{-1}.



3. A distância percorrida por um carro é dada pelos valores na tabela.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
d (pés)	0	10	32	70	119	178

   (a) Use os dados para esboçar o gráfico de d como uma função de t.
   (b) Use o gráfico para estimar a distância percorrida depois de 4,5 segundos.

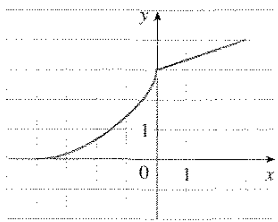
4. Esboce o gráfico do rendimento de uma colheita como uma função da quantidade de fertilizante usado.

5–8 ▢ Determine o domínio e a imagem da função.

5. $f(x) = \sqrt{4 - 3x^2}$
6. $g(x) = 1/(x + 1)$
7. $y = 1 + \operatorname{sen} x$
8. $y = \ln x$

9. Suponha que seja dado o gráfico de f. Descreva como os gráficos das seguintes funções podem ser obtidos a partir do gráfico de f.
   (a) $y = f(x) + 8$
   (b) $y = f(x + 8)$
   (c) $y = 1 + 2f(x)$
   (d) $y = f(x - 2) - 2$
   (e) $y = -f(x)$
   (f) $y = f^{-1}(x)$

10. Dado o gráfico de f, desenhe os gráficos das seguintes funções.
   (a) $y = f(x - 8)$
   (b) $y = -f(x)$
   (c) $y = 2 - f(x)$
   (d) $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$
   (e) $y = f^{-1}(x)$
   (f) $y = f^{-1}(x + 3)$



11–16 ▢ Use as transformações para esboçar o gráfico da função.

11. $y = -\operatorname{sen} 2x$
12. $y = 3 \ln(x - 2)$
13. $y = (1 + e^x)/2$
14. $y = 2\sqrt{-x}$
15. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$
16. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$

17. Determine se f é par, ímpar ou nenhum dos dois.
   (a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$
   (b) $f(x) = x^3 - x^7$
   (c) $f(x) = e^{-x^2}$
   (d) $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$

18. Encontre uma expressão para a função cujo gráfico consiste no segmento de reta ligando o ponto (–2, 2) ao ponto (–1, 0) junto com a parte de cima do círculo com centro na origem e raio 1.

19. Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^2 - 9$, encontre as funções $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$, e seus domínios.

20. Expresse a função $F(x) = 1/\sqrt{x + \sqrt{x}}$ como uma composição de três funções.

21. A expectativa de vida aumentou significativamente no século XX. A tabela mostra a expectativa de vida no nascimento (em anos) de homens nascidos nos Estados Unidos.

Ano do nascimento	Expectativa de vida
1900	48,3
1910	51,1
1920	55,2
1930	57,4
1940	62,5
1950	65,6
1960	66,6
1970	67,1
1980	70,0
1990	71,8
2000	73,0

Utilize um mapa de dispersão para escolher um tipo apropriado de modelo. Use seu modelo para predizer a duração de vida de um homem nascido no ano 2010.

22. Um pequeno fabricante descobre que custa \$ 9.000 para produzir 1.000 torradeiras elétricas em uma semana e \$ 12.000 para produzir 1.500 torradeiras em uma semana.

(a) Expresse o custo como uma função do número de torradeiras produzidas, supondo que ele é linear. Então esboce o gráfico.

(b) Qual a inclinação do gráfico e o que ela representa?

(c) Qual o intercepto y do gráfico e o que ele representa?

23. Se $f(x) = 2x + \ln x$, encontre $f^{-1}(2)$.

24. Encontre a função inversa de $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 1}$.

25. Encontre o valor exato de cada expressão.

(a) $e^{2\ln 3}$ (b) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$

(c) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} \frac{1}{2})$ (d) $\operatorname{sen}(\cos^{-1} \frac{4}{5})$

26. Resolva cada equação para x.

(a) $e^x = 5$ (b) $\ln x = 2$

(c) $e^{e^x} = 2$ (d) $\operatorname{tg}^{-1} x = 1$

27. A meia-vida do paládio-100, ^{100}Pd, é de quatro dias. (Assim, a metade de qualquer quantidade de ^{100}Pd vai se desintegrar em 4 dias.) A massa inicial de uma amostra é 1 grama.

(a) Encontre a massa restante após 16 dias.

(b) Encontre a massa $m(t)$ restante após t dias.

(c) Encontre a função inversa de $m(t)$ e explique seu significado.

(d) Quando a massa ficará reduzida a 0,01 g?

28. A população de uma certa espécie em um ambiente limitado, com a população inicial igual a 100 e capacidade para suportar 1.000 indivíduos, é

$$P(t) = \frac{100.000}{100 + 900e^{-t}}$$

onde t é medido em anos.

(a) Faça o gráfico dessa função e estime quanto tempo levará para a população atingir 900 indivíduos.

(b) Encontre a inversa dessa função e explique seu significado.

(c) Use a função inversa para encontrar o tempo necessário para a população atingir 900 indivíduos. Compare o resultado com o da parte (a).

29. Faça o gráfico dos membros da família de funções $f(x) = \ln(x^2 - c)$ para vários valores de c. Como o gráfico se modificará quando c variar?

30. Faça o gráfico de três funções $y = x^a$, $y = a^x$ e $y = \log_a x$ e sobre a mesma tela para dois ou três valores de $a > 1$. Para os grandes valores de x, quais dessas funções terão valores maiores e quais terão valores menores?

Princípios para a Solução de Problemas

Não existem regras rígidas que garantam sucesso na solução de problemas. Porém, é possível esboçar alguns passos gerais no processo de problema–solução e fornecer alguns princípios que poderão ser úteis na solução de certos problemas. Esses passos e princípios são tão-somente o senso comum tornado explícito. Eles foram adaptados do livro de George Polya, *How to Solve It*.

1 Entendendo o problema

O primeiro passo é ler o problema e assegurar-se de que o entendeu claramente. Faça a si mesmo as seguintes perguntas:

O que é desconhecido?
Quais são as quantidades dadas?
Quais são as condições dadas?

Para muitos problemas é proveitoso

fazer um diagrama

e identificar no diagrama as quantidades dadas e pedidas.

Geralmente é necessário

introduzir uma notação apropriada

Ao escolher os símbolos para as quantidades desconhecidas freqüentemente utilizamos as letras tais como a, b, c, m, n, x e y, mas, em alguns casos, ajuda usar as iniciais como símbolos sugestivos; por exemplo, V para o volume ou t para o tempo.

2 Planejando

Encontre uma conexão entre a informação dada e a pedida que o ajudará a encontrar a desconhecida. Em geral ajuda perguntar-se explicitamente: "Como posso relacionar o que foi dado com o que foi pedido?". Se não for possível visualizar a conexão imediatamente, as idéias que se seguem podem ser úteis para delinear um plano.

Tente Reconhecer Algo Familiar Relacione a situação dada com seu conhecimento anterior. Focalize na incógnita e tente se lembrar de um problema mais familiar que a envolva.

Tente Reconhecer os Padrões Alguns problemas são resolvidos reconhecendo-se o tipo de padrão no qual ocorrem. O padrão pode ser geométrico, numérico ou algébrico. Você pode ver a regularidade ou a repetição em um problema ou ser capaz de conjecturar sobre o padrão de seu desenvolvimento para depois prová-lo.

Use Analogias Tente pensar sobre os problemas análogos, isto é, um problema similar, um problema relacionado, mas que seja mais simples que o problema original. Se você puder resolver o problema similar mais simples, isso poderá lhe dar pistas para a solução do problema original, mais difícil. Por exemplo, se um problema envolver números muito grandes, você poderá primeiro tentar um problema similar com números menores. Caso o problema envolva a geometria tridimensional, você poderá tentar primeiro um problema similar bidimensional. Se seu problema for genérico, tente primeiro um caso especial.

Introduzindo Alguma Coisa Extra Às vezes pode ser necessário introduzir algo novo, um auxílio extra, para que você faça a conexão entre o que foi dado e o que foi pedido. Por exemplo, em um problema no qual o diagrama é fundamental, a ajuda extra pode ser o traçado de uma nova reta nele. Em problemas mais algébricos pode ser a introdução de uma nova incógnita relacionada com a original.

Dividindo em Casos Algumas vezes temos de dividir o problema em vários casos e usar para cada um deles um argumento diferente. Por exemplo, empregamos essa estratégia quando tratamos com os valores absolutos.

Trabalhando Retroativamente Às vezes é proveitoso imaginar que seu problema foi resolvido e trabalhar passo a passo retroativamente até chegar ao que foi dado. E então você poderá ser capaz de reverter seus passos e, portanto, construir uma solução para o problema original. Esse procedimento é usado freqüentemente na solução de equações. Por exemplo, ao resolver a equação $3x - 5 = 7$, supomos que x seja um número que satisfaça $3x - 5 = 7$ e trabalhamos retroativamente. Adicionamos 5 a ambos os lados da equação e então dividimos cada lado por 3 para obter $x = 4$. Como cada um desses passos pode ser revertido, resolvemos o problema.

Estabelecendo Submetas Em um problema complexo é freqüentemente proveitoso estabelecer submetas (nas quais a situação desejada está apenas parcialmente satisfeita). Você pode atingir primeiro essas submetas e, depois, a partir delas, chegar à meta final.

Raciocínio Indireto Algumas vezes é apropriado atacar o problema indiretamente. Para provar, por contradição, que P implica Q, supomos que P e Q são falsos e tentamos mostrar por que isso não pode acontecer. De certa forma temos de usar essa informação e chegar a uma contradição do que sabemos perfeitamente ser verdadeiro.

Indução Matemática Para provar as afirmações que envolvem um número inteiro positivo n, é freqüentemente útil usar o princípio que se segue.

> **Princípio da Indução Matemática** Seja S_n uma afirmação sobre o número inteiro n. Suponha que
>
> **1.** S_1 seja verdadeira.
>
> **2.** S_{k+1} seja verdadeira sempre que S_k for verdadeira.
>
> Então S_n é verdadeira para todo n inteiro positivo.

Isso é razoável, pois uma vez que S_1 é verdadeira, segue, da condição 2 (com $k = 1$), que S_2 é verdadeira. Então, utilizando a condição 2 com $k = 2$, vemos que S_3 é verdadeira. E novamente usando a condição 2 e, dessa vez, com $k = 3$, temos S_4 como verdadeira. Esse procedimento pode ser seguido indefinidamente.

3 Cumprindo o Plano

Na etapa 2 um plano foi delineado. Para cumpri-lo devemos verificar cada etapa do plano e escrever os detalhes que provam a correção de cada etapa.

4 Revendo

Tendo completado nossa solução, é prudente revisá-la, em parte, para ver se foram cometidos erros e, em parte, para ver se podemos descobrir uma forma mais fácil de resolver um problema. Outra razão para a revisão é que ela nos familiarizará com o método de solução que poderá ser útil na solução de futuros problemas. Descartes disse: "Todo problema que resolvi acabou se tornando uma regra que serviu posteriormente para resolver outros problemas".

Esses princípios da solução de problemas estão ilustrados nos exemplos a seguir. Antes de ver as soluções, tente resolvê-los usando os princípios estudados anteriormente.

Pode ser proveitoso consultar de tempos em tempos esta seção, quando estiver resolvendo os exercícios nos demais capítulos do livro.

Exemplo 1 Expresse a hipotenusa h do triângulo retângulo com uma área de 25 m^2 como uma função do seu perímetro P.

■ Entendendo o problema

Solução Classifique primeiro as informações identificando a quantidade desconhecida e os dados:

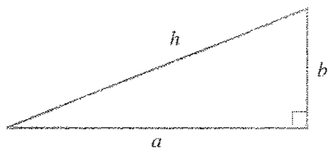
$$\textit{Incógnita}: \text{ hipotenusa } h$$

$$\textit{Quantidades dadas}: \text{ perímetro } P, \text{ área } 25 \text{ m}^2$$

■ Desenhando um diagrama

É útil fazer um diagrama; assim, fizemos isto na Figura 1.

FIGURA 1



■ Ligando os dados com a incógnita

■ Introduzindo alguma coisa extra

A fim de conectar o que foi dado à incógnita, introduzimos duas variáveis extras, a e b, que são os comprimentos dos outros dois lados do triângulo. Isso nos possibilitará expressar a condição dada, de o triângulo ser retângulo, pelo Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

As outras conexões entre as variáveis surgem escrevendo-se as expressões para a área e o perímetro:

$$25 = \tfrac{1}{2}ab \qquad P = a + b + h$$

Uma vez que P é dado, observe que temos agora três equações em três incógnitas a, b e h:

$$\boxed{1} \qquad h^2 = a^2 + b^2$$

$$\boxed{2} \qquad 25 = \tfrac{1}{2}ab$$

$$\boxed{3} \qquad P = a + b + h$$

■ Relacionando com algo familiar

Embora tenhamos um número correto de equações, elas não são fáceis de ser resolvidas diretamente. Porém, se usarmos as estratégias de problema–solução para tentar reconhecer algo familiar, então poderemos resolver essas equações de forma mais fácil. Olhando os segundos membros das Equações 1, 2 e 3, eles não lhe lembram algo familiar? Observe que eles contêm os ingredientes de uma fórmula familiar:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Usando essa idéia, vamos expressar $(a + b)^2$ de duas maneiras. Das Equações 1 e 2 temos

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = h^2 + 4(25)$$

Da Equação 3 temos

$$(a + b)^2 = (P - h)^2 = P^2 - 2Ph + h^2$$

Assim
$$h^2 + 100 = P^2 - 2Ph + h^2$$
$$2Ph = P^2 - 100$$
$$h = \frac{P^2 - 100}{2P}$$

Essa é a expressão requerida para h como uma função de P. □

Como no exemplo ilustrado a seguir, é freqüentemente necessário usar o princípio de *dividir em casos* quando tratamos com valores absolutos.

Exemplo 2 Resolva a desigualdade $|x - 3| + |x + 2| < 11$.

Solução Lembre-se da definição de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Segue-se que
$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x - 3 \geqslant 0 \\ -(x - 3) & \text{se } x - 3 < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \geqslant 3 \\ -x + 3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

Analogamente
$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x + 2 \geqslant 0 \\ -(x + 2) & \text{se } x + 2 < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \geqslant -2 \\ -x - 2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

■ Dividindo em casos

Essas expressões mostram que devemos considerar três casos:

$$x < -2 \qquad -2 \leqslant x < 3 \qquad x \geqslant 3$$

CASO I □ Se $x < -2$, temos

$$|x - 3| + |x + 2| < 11$$
$$-x + 3 - x - 2 < 11$$
$$-2x < 10$$
$$x > -5$$

CASO II □ Se $-2 \leqslant x < 3$, a desigualdade dada torna-se

$$-x + 3 + x + 2 < 11$$
$$5 < 11 \qquad \text{(sempre é verdadeiro)}$$

CASO III □ Se $x \geqslant 3$, a desigualdade torna-se

$$x - 3 + x + 2 < 11$$
$$2x < 12$$
$$x < 6$$

Combinando os casos I, II e III, vemos que a desigualdade está satisfeita quando $-5 < x < 6$. Logo a solução é o intervalo $(-5, 6)$.

No exemplo a seguir tentaremos configurar a resposta examinando os casos especiais e reconhecendo um padrão. A seguir vamos prová-lo por indução matemática.

Ao usar o Princípio da Indução Matemática, vamos seguir as três etapas:

Passo 1 Prove que S_n é verdadeira quando $n = 1$.

Passo 2 Presuma que S_n é verdadeira quando $n = k$ e deduza que S_n é verdadeira quando $n = k + 1$.

Passo 3 Conclua que S_n é verdadeira para todo n pelo Princípio da Indução Matemática.

Exemplo 3 Se $f_0(x) = x/(x + 1)$ e $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encontre uma fórmula para $f_n(x)$.

Analogia: Vamos tentar um problema mais simples

Solução Começamos por encontrar fórmulas para $f_n(x)$ nos casos especiais $n = 1, 2$ e 3.

$$f_1(x) = (f_0 \circ f_0)(x) = f_0(f_0(x)) = f_0\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f_2(x) = (f_0 \circ f_1)(x) = f_0(f_1(x)) = f_0\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{3x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

Procurando por um padrão

$$f_3(x) = (f_0 \circ f_2)(x) = f_0(f_2(x)) = f_0\left(\frac{x}{3x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{x}{3x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{4x+1}{3x+1}} = \frac{x}{4x+1}$$

Observamos um padrão: o coeficiente de x no denominador de $f_n(x)$ é $n + 1$ nos três casos calculados. Assim sendo, fazemos a seguinte conjectura, no caso geral,

$$\boxed{4} \qquad f_n(x) = \frac{x}{(n+1)x + 1}$$

Para provar, usamos o Princípio da Indução Matemática. Já vimos que (4) é verdadeira para $n = 1$. Suponha que ela é verdadeira para $n = k$, isto é,

$$f_k(x) = \frac{x}{(k+1)x + 1}$$

Então $\quad f_{k+1}(x) = (f_0 \circ f_k)(x) = f_0(f_k(x)) = f_0\left(\dfrac{x}{(k+1)x+1}\right)$

$$= \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{x}{(k+1)x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{(k+2)x+1}{(k+1)x+1}} = \frac{x}{(k+2)x+1}$$

Essa expressão mostra que (4) é verdadeira para $n = k + 1$. Portanto, por indução matemática, é verdadeira para todo n inteiro positivo. □

Problemas

1. Um dos lados de um triângulo retângulo tem 4 cm de comprimento. Expresse o comprimento da altura perpendicular à hipotenusa como uma função do comprimento da hipotenusa.

2. A altura perpendicular da hipotenusa de um triângulo retângulo mede 12 cm. Expresse o comprimento da hipotenusa como uma função do perímetro.

3. Resolva a equação $|2x - 1| - |x + 5| = 3$.

4. Resolva a desigualdade $|x - 1| - |x - 3| \geqslant 5$.

5. Esboce o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$.

6. Esboce o gráfico da função $g(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$.

7. Faça o gráfico da equação $x + |x| = y + |y|$.

8. Faça o gráfico da equação $x^4 - 4x^2 - x^2y^2 + 4y^2 = 0$.

9. Esboce a região do plano que consiste em todos os pontos (x, y) tal que $|x| + |y| \leqslant 1$.

10. Esboce a região do plano que consiste em todos os pontos (x, y) tal que

$$|x - y| + |x| - |y| \leqslant 2$$

11. Compute $(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)\cdots(\log_{31} 32)$.

12. (a) Mostre que a função $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ é ímpar.
(b) Encontre a função inversa de f.

13. Resolva a desigualdade $\ln(x^2 - 2x - 2) \leqslant 0$.

14. Use de um raciocínio inverso para provar que $\log_2 5$ é um número irracional.

15. Uma pessoa inicia uma viagem. Na primeira metade do percurso ela viaja sossegadamente a 30 mi/h; na segunda, ela vai a 60 mi/h. Qual sua velocidade média na viagem?

16. É verdadeiro que $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$?

17. Prove que, se n for um inteiro positivo, então $7^n - 1$ é divisível por 6.

18. Prove que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

19. Se $f_0(x) = x^2$ e $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encontre uma fórmula para $f_n(x)$.

20. (a) Se $f_0(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ e $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encontre uma expressão para $f_n(x)$ e use a indução matemática para prová-la.

(b) Faça os gráficos na mesma tela de f_0, f_1, f_2, f_3 e descreva os efeitos da composição repetida.