Teoria da Dualidade e suas Aplicações

Prof. Fernando Augusto Silva Marins
Departamento de Produção
Faculdade de Engenharia – Campus de Guaratinguetá
UNESP

www.feg.unesp.br/~fmarins
fmarins@feg.unesp.br

Introdução

Tanto do ponto de vista teórico como prático, a Teoria da Dualidade é um dos mais importantes tópicos da Programação Linear (PL).

Estudos mostraram que intrinsecamente associado a cada modelo de PL (denominado *Primal*) há outro modelo (denominado *Dual*) com várias interessantes propriedades.

Possibilitou o surgimento de variações do Método Simplex (como o *Método Dual Simplex* ou *Métodos Primais-Duais*).

Interpretação econômica dos modelos duais ("*Shadow Prices*")

O par de modelos de PL: *Primal* e *Dual*

Definição: forma simétrica de um modelo de PL:

Todas variáveis devem ser não-negativas;

Todas restrições devem ser desigualdades com

Modelo de maximização $\Rightarrow$ restrições do tipo "$\leq$"

Modelo de minimização $\Rightarrow$ restrições do tipo "$\geq$"

Definição: a todo modelo de maximização da forma (1), denominado Primal, está associado um modelo de minimização da forma (2), chamado Dual:

(1) *Primal* $\quad$ Max $Z = C^T X$ $\quad$ sujeito a: $AX \leq B$, $X \geq 0$.

(2) *Dual* $\quad$ Min $W = YB$ $\quad$ sujeito a: $YA \geq C$, $Y \geq 0$.

Regras para achar o Dual de um Primal na forma simétrica

Definir uma variável Dual ($Y \geq 0$) para cada restrição do Primal.

Fazer o vetor C de coeficientes de variáveis primais na função objetivo ser o vetor de constantes das restrições do Dual.

Fazer o vetor B de constantes nas restrições do Primal ser o vetor de coeficientes de variáveis duais na função objetivo do Dual.

A transposta da matriz a de coeficientes de variáveis primais nas restrições do Primal, A^t, será a matriz dos coeficientes das variáveis duais nas restrições do Dual.

O sentido das desigualdades das restrições do Dual será o inverso do sentido das desigualdades das restrições do Primal.

O critério de otimização da função objetivo do Dual será maximização se o Primal for de minimização, e será de minimização caso contrário.

Exemplo de aplicação das regras para obtenção do Dual

Exemplo 1

Considere o seguinte modelo Primal:

$$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2 - 3X_3 + 4X_4 \quad \text{s. a:} \quad \begin{cases} X_1 + 2X_2 + 2X_3 - 3X_4 \leq 25 \\ 2X_1 + X_2 - 3X_3 + 2X_4 \leq 15 \\ X_i \geq 0, i = 1, 4. \end{cases}$$

As regras apresentadas levam ao modelo Dual abaixo:

$$\text{Min } W = 25Y_1 + 15Y_2 \quad \text{s. a:} \quad \begin{cases} Y_1 + 2Y_2 \geq 1 \\ 2Y_1 + Y_2 \geq 2 \\ 2Y_1 - 3Y_2 \geq -3 \\ -3Y_1 + 2Y_2 \geq 4 \\ Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ilustração de interpretação do Dual

Um fabricante deseja transportar uma mercadoria de dois armazéns A_1 e A_2 até três lojas L_1 , L_2 , e L_3 com menor custo de transporte.. As quantidades de mercadoria disponíveis nos armazéns são 300 e 600 respectivamente para A_1 e A_2 . as demandas pelo produto em cada loja são dadas por 200, 300, 400, respectivamente para as lojas L_1, L_2, e L_3. Os custos unitários para transportar o produto de cada armazém para cada loja (em dólar) são os seguintes:

	Loja 1	Loja 2	Loja 3
Armazém 1	2	4	3
Armazém 2	5	3	4

Ilustração de interpretação do Dual

Pode-se modelar este problema por um Modelo de Transporte Simples:

Variáveis de decisão: X_{ij} = quant. de produto levado de A_i para L_j

Função objetivo: $\text{Min } Z = 2X_{11} + 4X_{12} + 3X_{13} + 5X_{21} + 3X_{22} + 4X_{23}$

Restrições:

sujeito a:

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 300 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 600 \\ X_{11} + X_{21} \geq 200 \\ X_{12} + X_{22} \geq 300 \\ X_{13} + X_{23} \geq 400 \\ X_{ij} \geq 0, \; i = 1, 2 \quad j = 1, 3. \end{cases}$$

Ilustração de interpretação do Dual

Colocando o Modelo de Transporte na forma simétrica:

(*Primal*)

$$\text{Min } Z = 2X_{11} + 4X_{12} + 3X_{13} + 5X_{21} + 3X_{22} + 4X_{23}$$

Sujeito a:

$$\begin{cases} -X_{11} - X_{12} - X_{13} \geq -300 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} \geq -600 \\ X_{11} + X_{21} \geq 200 \\ X_{12} + X_{22} \geq 300 \\ X_{13} + X_{23} \geq 400 \\ X_{ij} \geq 0, i = 1, 2 \quad j = 1, 3. \end{cases}$$

Ilustração de interpretação do Dual

Aplicando as regras para a obtenção do Dual:

(*Dual*)

$$\text{Max } W = -300Y_1 - 600Y_2 + 200Y_3 + 300Y_4 + 400Y_5$$

Sujeito a:

$$\begin{cases} -Y_1 + Y_3 \leq 2 \\ -Y_1 + Y_4 \leq 4 \\ -Y_1 + Y_5 \leq 3 \\ -Y_2 + Y_3 \leq 5 \\ -Y_2 + Y_4 \leq 3 \\ -Y_2 + Y_5 \leq 4 \\ Y_j \geq 0,\ j = 1, 5. \end{cases}$$

Interpretação para o Dual:

Uma companhia de transporte oferece ao fabricante a seguinte proposta: comprar os estoques do produto nos armazéns pagando $\$Y_1$ e $\$Y_2$ por unidade do produto, respectivamente nos armazéns A_1 e A_2; alem disto se compromete a vender o mesmo produto às lojas L_1 , L_2 e L_3 , por respectivamente $\$Y_3$, $\$Y_4$ e $\$Y_5$.

Reparar que a função objetivo Dual corresponde a exatamente maximizar o retorno líquido da companhia de transporte (Lucro = Receita - Custos):

$$\text{Max } W = 200Y_3 + 300Y_4 + 400Y_5 - 300Y_1 - 600Y_2 .$$

Interpretação para o Dual:

Argumentos utilizados pela Companhia de Transporte para convencer o fabricante do produto a aceitar o negócio:

Como tem-se $C_{11} = 2$ e a primeira restrição do Dual é $Y_3 - Y_1 \leq 2$ é interessante do ponto de vista do fabricante a proposta da empresa de transporte.

Observe que isto se repete em todas as outras situações de armazéns e lojas (demais restrições do Dual)

A Teoria da Dualidade mostra que Max W = Min Z.

Propriedades importantes:

Primal – max e o seu Dual - min

Teorema 1 (*da Dualidade fraca*): *para soluções viáveis*: o valor da função objetivo do Dual ≥ o valor da função objetivo do Primal

Corolário 1: *para soluções viáveis*: todo valor da função objetivo do Primal é um limitante inferior para a função objetivo do Dual.

Corolário 2: *para soluções viáveis*: todo valor da função objetivo do Dual é um limitante superior para a função objetivo do Primal.

Propriedades importantes:

Primal – max e o seu Dual - min

Corolário 3: *se* o Primal é viável e o valor de $Z \to \infty$ *então* o Dual é inviável.

Corolário 4: *se* o Dual é viável e $W \to -\infty$ *então* o Primal é inviável.

Corolário 5: *se* o Primal é viável e o Dual inviável *então* o Primal é ilimitado ($Z \to \infty$).

Corolário 6: *se* o Dual é viável o Primal inviável *então* o Dual é ilimitado ($W \to -\infty$).

Ilustração das Propriedades

Exemplo 2: considere os seguintes problemas duais abaixo:

(*Primal*)

$$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4$$

$$\text{s. a: } \begin{cases} X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 3X_4 \leq 20 \\ 2X_1 + X_2 + 3X_3 + 2X_4 \leq 20 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{cases}$$

(*Dual*)

$$\text{Min } W = 20Y_1 + 20Y_2$$

$$\text{s. a: } \begin{cases} Y_1 + 2Y_2 \geq 1 \\ 2Y_1 + Y_2 \geq 2 \\ 2Y_1 + 3Y_2 \geq 3 \\ 3Y_1 + 2Y_2 \geq 4 \\ Y_1, Y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ilustração das Propriedades

Pode-se verificar que: $x^0 = \begin{pmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \\ X_3^0 \\ X_4^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Y^0 = \begin{pmatrix} Y_1^0 & Y_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

São soluções viáveis para o Primal e o Dual, respectivamente.

Para o Primal tem-se: $z^0 = cx^0 = (1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 10$

Para o Dual tem-se : $W^0 = Y^0 b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} = 40$

Notar $z^0 \leq w^0$ que satisfaz o teorema da Dualidade fraca.

Pelos corolários o valor mínimo de W não pode ser menor que 10 e o valor máximo de Z não pode exceder 40.

Exemplo 3: aplicação do corolário 5:

$$(\text{Primal})\ \ \text{Max } Z = X_1 + X_2 \quad \text{s.a}: \begin{cases} -X_1 + X_2 + X_3 \le 2 \\ -2X_1 + X_2 - X_3 \le 1 \\ X_i \ge 0 \end{cases}$$

$$(\text{Dual})\qquad \text{Min } W = 2Y_1 + Y_2 \quad \text{s.a}: \begin{cases} -Y_1 - 2Y_2 \ge 1 \\ Y_1 + Y_2 \ge 1 \\ Y_1 - Y_2 \ge 0 \\ Y_j \ge 0 \end{cases}$$

- Seja x = 0 uma solução viável para o Primal. Por inspeção verifica-se que o Dual é inviável pois a restrição $-Y_1 - 2Y_2 \ge 1$ é inconsistente com as restrições de não-negatividade.
- Pelo corolário 5 pode-se afirmar que o Primal é ilimitado.

Teorema 2 (Critério de Otimalidade)

Teorema 2 (*critério de otimalidade*): sejam X^* e Y^* soluções viáveis, respectivamente para o Primal e o Dual na forma simétrica,.De tal forma que os valores das funções objetivo são iguais. Então tem-se que X^* é solução ótima para o Primal e Y^* é solução ótima para o Dual.

Exemplo 4: considere os problemas Primal e o Dual *do exemplo 2*:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ com } Z^0 = 28 \text{ e } Y^0 = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \text{com } W^0 = 28 \Rightarrow X^0 = X^* \text{ e } Y^0 = Y^*$$

Teorema 3 e Teorema 4

Teorema 3 (*Dualidade forte*): *se* os problemas Primal e Dual são viáveis *então* ambos tem soluções ótimas e os valores ótimos de suas funções objetivo são iguais.

Teorema 4 (*Condições de Folgas Complementares - CFC*): considere X^* e Y^*, respectivamente soluções viáveis para os problemas Primal e Dual abaixo. *então* x^* e y^* são soluções ótimas para seus problemas *se e somente se* $(Y^* A - C)X^* + Y^* (b - AX^*) = 0$.

(*Primal*) Max $Z = CX$ s.a: $AX \leq b$, $X \geq 0$.

(*Dual*) Min $W = Yb$ s.a: $YA \geq C$, $Y \geq 0$.

Considere os vetores formados, respectivamente pelas variáveis de folga do Primal e do Dual: u e v. Pode-se mostrar que as CFC do Teorema 4 podem ser expressas por:

1. Se a variável $X_j^* > 0 \Rightarrow$ isto é a correspondente restrição j do Dual será do tipo igualdade.

2. Se a restrição i do Primal é do tipo inequação estrita, isto é se $\mathbf{U_i^* > 0 \Rightarrow Y_i^* = 0.}$

3. Se $\mathbf{Y_i^* > 0 \Rightarrow U_i^* = 0}$, a restrição i do Primal será do tipo igualdade.

4. Se a restrição j do Dual é do tipo inequação estrita: $\mathbf{V_j^* > 0 \Rightarrow X_j^* = 0}$

Exemplo 5 - Uso das CFC

Considerando os dados do *Exemplo 2*, com o acréscimo das variáveis de folgas aos problemas Primal e Dual:

(*Primal*) $\text{Max } Z = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4$

s. a: $\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 3X_4 + U_1 = 20 \\ 2X_1 + X_2 + 3X_3 + 2X_4 + U_2 = 20 \\ X_i \geq 0, U_j \geq 0 \end{cases}$

(*Dual*) $\text{Min } W = 20Y_1 + 20Y_2$

s. a: $\begin{cases} Y_1 + 2Y_2 - V_1 = 1 \\ 2Y_1 + Y_2 - V_2 = 2 \\ 2Y_1 + 3Y_2 - V_3 = 3 \\ 3Y_1 + 2Y_2 - V_4 = 4 \\ Y_j \geq 0, V_i \geq 0 \end{cases}$

Exemplo 5

Usando as CFC e sabendo que $y^* = (1{,}2 \quad 0{,}2)$ determinar x^* .

Como
$$\begin{cases} Y_1^* = 1{,}2 > 0 \Rightarrow U_1^* = 0 & (1) \\ Y_2^* = 0{,}2 > 0 \Rightarrow U_2^* = 0 & (2) \\ Y_1^* + 2Y_2^* = 1{,}6 > 1 \Rightarrow V_1^* > 0 \text{ e } X_1^* = 0 & (3) \\ 2Y_1^* + Y_2^* = 2{,}6 > 0 \Rightarrow V_2^* > 0 \text{ e } X_2^* = 0 & (4) \\ 2Y_1^* + 3Y_2^* = 3 \Rightarrow V_3^* = 0 \text{ e assim } X_3^* \geq 0 & (5) \\ 3Y_1^* + 2Y_2^* = 4 \Rightarrow V_4^* = 0 \text{ e assim } X_4^* \geq 0 & (6) \end{cases}$$

As condições (5) e (6) não ajudam muito para achar X_3* e X_4*. Mas substituindo os valores de X_1*, X_2*, U_1* e U_2* nas restrições do Primal:

$$\begin{cases} 2X_3^* + 3X_4^* = 20 \\ 3X_3^* + 2X_4^* = 20 \end{cases} \Rightarrow X_3^* = 4 \text{ e } X_4^* = 4.$$

Outras aplicações das CFC

- Testar se uma dada SBV X é ótima para o Primal: considera-se como ótima a solução dada e tenta-se construir a partir dela uma solução ótima para o Dual usando as CFC. Se isto for bem sucedido $\Rightarrow$ X é solução ótima.

- Testar a natureza das soluções ótimas de um modelo de PL. Pode-se por exemplo estar interessado em saber se na Solução Ótima haverá recursos que não serão utilizados totalmente, ou seja haverá restrições no Primal do tipo desigualdade estrita.

Exemplo 6

Suponha que no exemplo anterior desejava-se saber se $U_1^* > 0$ e $U_2^* > 0$. Pelas CFC, admitindo válida esta hipótese tem-se:

$U_1^* > 0$ e $U_2^* > 0 \Rightarrow Y_1^* = Y_2^* = 0$ para o dual.

Mas esta solução é inviável para o Dual, logo a hipótese feita de que $U_1^* > 0$ e $U_2^* > 0$ é falsa.

•Aplicação no algoritmo "Stepping Stone " para modelos de transporte da PL.

•Há outras importantes aplicações na Programação Não-linear.

Observações importantes

1. Para Primal de minimização:

$$(\textit{Primal})\ \ \text{Min } Z = CX \qquad \text{s. a: } \{AX \geq b,\ X \geq 0\}$$

$$\Downarrow$$

$$(\textit{Dual})\ \ \text{Max } W = YB \qquad \text{s. a: } \{YA \leq C,\ Y \geq 0\}$$

2. O Dual do Dual é o Primal.

3. Regras gerais para obtenção do Dual:

Observações importantes

Primal (maximização)	*Dual* (minimização)
A (matriz de coeficientes)	A^t
B (vetor de constantes)	C
C (vetor de custos)	B
restrição i é do tipo =	Y_i é variável livre
restrição i é do tipo ≤	$Y_i \geq 0$
restrição i é do tipo ≥	$Y_i \leq 0$
X_j é variável livre	restrição j é do tipo =
$X_j \geq 0$	restrição j é do tipo ≥
$X_j \leq 0$	restrição j é do tipo ≤

Exemplo 7: Obter o Dual

$$\text{Max } Z = X_1 + 4X_2 + 3X_3 \quad \text{s. a :} \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 - 5X_3 \leq 2 \\ 3X_1 - X_2 + 6X_3 \geq 1 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 4 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \leq 0,\ X_3 \text{ livre} \end{cases}$$

Aplicando as regras gerais tem-se:

$$\text{(Dual)} \quad \text{Min } W = 2Y_1 + Y_2 + 4Y_3 \quad \text{S. A :} \begin{cases} 2Y_1 + 3Y_2 + Y_3 \geq 1 \\ 3Y_1 - Y_2 + Y_3 \leq 4 \\ -5Y_1 + 6Y_3 + Y_3 = 3 \\ Y_1 \geq 0,\ Y_2 \leq 0,\ Y_3 \text{ livre} \end{cases}$$

Observações importantes (continuação)

4. Todos os teoremas vistos valem também para o caso de Primal e Dual na forma assimétrica.

5. Interpretação econômica das variáveis duais ótimas:

Os valores ótimos das variáveis duais podem ser interpretados como sendo os *preços* (“*Shadow Prices*”) que alguém estaria disposto a pagar por unidades adicionais dos recursos envolvidos nas restrições do Primal.

6. Obtenção da solução ótima do Dual através do Primal:

$$Y^* = \lambda^* = c_b\, b^{-1}$$